

DELHI
UNIVERSITY
LIBRARY.

u
Class No 522.7

Book No B17IN
pt. 1

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

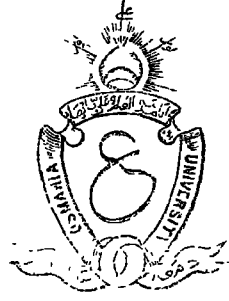
Cl. No. B9:5

168N39.1

Ac. No. 29201

Date of release for loan

This book should be returned on or before the date last stamped below. An overdue charge of one anna will be charged for each day the book is kept overtime



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

علم ہیئت کروی حصہ اول

تصنیف

سر رابرٹ بال ایم۔ اے ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد زبیر الدین ایم۔ اے (مختصانیہ)

رکن سررشتہ تالیف و ترجمہ سرکار عالی

۱۳۵۸ھ م ۳۲۸ شام ۱۹۳۹ء

طبع و نشر
دارالافتاء اسلامیہ پاکستان

522.7

B 17

pt-1
29201

یہ کتاب کیمبرج یونیورسٹی پریس کے اینٹنس مسز میکیلن اینڈ کمپنی
کی اجازت سے جن کو حق اشاعت حاصل ہے
اردو میں ترجمہ کر کے طبع و شائع کی گئی ہے۔

B 9 : 5

168 N39.1

فہرست مضامین

علم ہیئت کروی

حصہ اول

پہلا باب

اساسی ضابطے

صفحہ	دفعہ
۱	۱ — علم مثلث کروی
۱۲	۲ — ڈبلر اور نیپیر کی تمثیلات
۱۶	۳ — صحت جو نو کارائی عمل حساب میں حاصل ہو سکتی ہے
۱۹	۴ — کروی مثلث میں تفرقی ضابطے
۲۱	۵ — بینی اور ان کا فن
۳۴	پہلے باب پر مثالیں

دوسرا باب
کروی محدودوں کا استعمال

صفحہ	دفعہ
۳۸	۶ — کرہ بدرجہ دار بڑے دائرے
۴۰	۷ — کرہ پر کے کسی نقطہ کے محدود
	۸ — دو نقطوں کو ملانے والی قوس کی جیب اتمام کو ان نقطوں کے
۴۲	محدودوں میں بیان کرنا
۴۶	۹ — کرومی محدودوں میں دی ہوئی مساوات کا مفہوم
	۱۰ — دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان ان کے شطیبوں کو ملا نیوالی
۴۹	اس قوس کے مساوی ہوتا ہے جو ۸۰° سے بڑی نہ ہو
۵۱	۱۱ — دو درجہ دار بڑے دائروں کا تقاطع
۵۵	۱۲ — محدودوں کا استعمال
۶۳	۱۳ — لوکارتموں کا استعمال

تیسرا باب زمین کی شکل اور نقشہ کشی

۶۵	۱۴ — تمہید یہ
۶۶	۱۵ — عرض بلد
۷۱	۱۶ — نصف النهار پر نصف قطر انحناء
۷۵	۱۷ — نقشہ کشی کا نظریہ
۷۷	۱۸ — نقشہ کے ہم شکل ہونے کی شرطیں
۸۱	۱۹ — ہم شکل تعبیر میں پیمانہ
۸۱	۲۰ — مرکبیر کا ظل
۸۶	۲۱ — مساوی المیلان
۸۹	۲۲ — طبیعی اظلال
۹۳	۲۳ — کرہ پر کے کسی دائرہ کا طبیعی ظل بھی ایک دائرہ ہوتا ہے ...

صفحہ

۲۴	تسطیحی ظیل کے لیے عام ضابطے	۹۶
۲۵	ایسا نقشہ جس میں کرہ پکا ہر رقبہ، نقشہ پر مساوی رقبہ کے	
۹۹	ذریعہ تعبیر ہو	
۱۰۱	تیسرے باب پر متفرق مثالیں	

چوتھا باب

کرہ سماوی

۲۶	کرہ سماوی	۱۰۶
۲۷	افق سماوی	۱۱۰
۲۸	یومی حرکت	۱۱۱
۲۹	نصف النہار اور اول سمت	۱۱۵
۳۰	ارتفاع اور سمت	۱۱۹
۱۲۳	چوتھے باب پر مختلف مثالیں	

پانچواں باب

صعود مستقیم اور میل۔ سماوی عرض بلد اور طول بلد

۳۱	صعود مستقیم اور میل	۱۲۵
۳۲	نقطہ راس الحمل	۱۲۵
۳۳	ساعتی زاویہ اور کوکبی یوم	۱۳۰
۳۴	ساعتی زاویہ اور میل سے راسی فاصلہ اور سمت کی تعیین	۱۳۶
۳۵	تفرقی ضابطوں کے اطلاقات	۱۴۰

صفحہ	دفعہ
۱۴۸	۳۶ — کسی جرم فلکی کے تکبیر کا وقت
۱۵۷	۳۷ — کسی جرم فلکی کا طلوع و غروب
۱۶۲	۳۸ — سماوی عرض بلد اور طول بلد
۱۶۶	پانچویں باب پر مختلف مثالیں

چھٹا باب کرہ ہوائی کا انعطاف

۱۷۷	۳۹ — مناظری انعطاف کے قوانین
۱۸۱	۴۰ — ہیئت انعطاف
۱۸۳	۴۱ — ہوائی انعطاف کا عام نظریہ
۱۸۶	۴۲ — انعطاف کی محصلہ تقریبی مساوات کا تکمیل
۱۹۰	۴۳ — کرہ ہوائی کے انعطاف کے لیے کیسینی کا ضابطہ
۱۹۴	۴۴ — کرہ ہوائی کے انعطاف کے لیے دیگر ضابطے
۱۹۸	۴۵ — کرہ ہوائی کے دباؤ اور تپش کا اثر انعطاف پر
۱۹۹	۴۶ — مشاہدہ سے کرہ ہوائی کے انعطاف کی تعیینیں
۲۰۳	۴۷ — انعطاف کا اثر ساعتی زاویے اور میل پر
۲۰۵	۴۸ — انعطاف کا اثر دو قریبی سماوی نقطوں کے درمیان
۲۰۹	۴۹ — انعطاف کا اثر ایک دو ہرے تارے کے زاویہ محل کی
۲۱۰	پیمائش پر

ساتواں باب

صفحہ

صفحہ

کیپلر اور نیوٹن کے کلمے اور انکا استعمال

- ۵۰۔ وہ کلمے جن کی بموجب سیارے سورج کے گرد حرکت کرتے ہیں
اور جو ان کے موجد کیپلر کے نام سے موسوم ہیں ۲۲۲
- ۵۱۔ سورج کی ظاہری حرکت ۲۳۴
- ۵۲۔ ناقصی حرکت محسوب کرنا ۲۳۵
- ۵۳۔ ناقصی حرکت کے وہ ضابطے جو تربیعوں کے ذریعہ بیان
کئے گئے ہیں ۲۵۱

آکھواں باب

استقبال اور کبو

- ۵۴۔ قمر شمس استقبال کا مشاہدہ ۲۶۳
- ۵۵۔ قمر شمس استقبال اور کبو کی طبعی توضیح ۲۶۶
- ۵۶۔ سیاروی استقبال ۲۷۰
- ۵۷۔ صعود مستقیم اور میل کی رقوم میں استقبال اور کبو کے لیے عام
ضابطے ۲۷۳
- ۵۸۔ راس الحمل کی حرکت طریق الشمس پر ۲۸۵
- ۵۹۔ غیر تابع یومی اعداد ۲۸۹
- ۶۰۔ ستاروں کی ذاتی حرکتیں ۳۰۰
- ۶۱۔ ارضی عرض بلدوں میں تغیرات ۳۰۲
- آکھویں باب پر مثالیں ۳۰۴

صفحہ

صفحہ

نواں باب

کوکبی وقت اور اوسط وقت

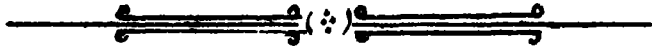
۶۲	— کوکبی وقت	۳۰۹
۶۳	— بینتی گہری کی تصحیح	۳۱۱
۶۴	— طریق انجمن کا میلان	۳۱۵
۶۵	— صعود مستقیم کی یقین میں جتنی صحت ممکن ہے اس کی تخمین	۳۲۰
۶۶	— کوکبی سال اور شمسی سال	۳۲۳
۶۷	— اوسط حرکت کا ہندسی اصول	۳۲۶
۶۸	— اوسط وقت	۳۳۱
۶۹	— اوسط ظہر پر کوکبی وقت	۳۳۵
۷۰	— کوکبی وقت سے اوسط وقت معلوم کرنا	۳۳۸
۷۱	— ارضی تاریخ خط	۳۴۲
	نویں باب پر مثالیں	۳۴۵

دسواں باب

سورج کی ظاہری سالانہ حرکت

۷۲	— استواء کی تحویل	۳۴۸
۷۳	— مرکز کی مساوات	۳۵۲
۷۴	— وقت کی مساوات	۳۵۸

صفحہ	رقمہ
۳۶۱	۷۵ — وقت کی مساوات سے متعلق ضابطے
۳۶۴	۷۶ — وقت کی مساوات کی تریخی تعبیر
۳۷۱	۷۷ — وقت کی مقیم مساوات کی عام تحقیق
۳۷۸	۷۸ — موسموں کا سبب
۳۷۹	دسویں باب پر مثالیں



علم ہیئت کروئی

حصہ اول

پہلا باب

اساسی ضابطے

صفحہ

۱

۱۲

۱۶

۱۹

۲۱

۱ - علم مثلث کروئی -

۲ - ڈبلر اور نیپیر کی تمثیلات -

۳ - صحت جو نو کارتی عمل حساب میں حاصل ہو سکتی ہے -

۴ - کروئی مثلث میں تفرقی ضابطے -

۵ - بینی اور راج کا فن -

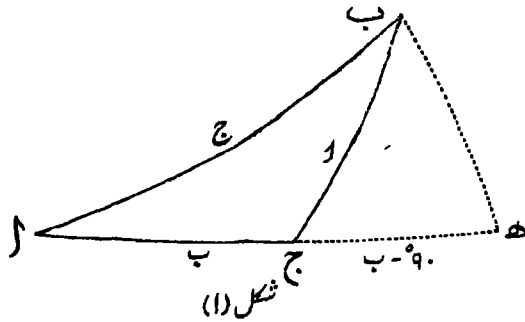
۱ - علم مثلث کروئی -

فرض کرو کہ ایک مثلث کروئی کے ضلع اور زاویے حسب معمول
 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ب'، 'ج' ہیں علم مثلث کروئی کی کتابوں میں یہ ثابت
 کیا گیا ہے کہ
 جم ج = جم ا + جم ب + جم د جب ا جب ب جم ج (۱)

جب ج جم \angle = جم \angle جب ب - جب \angle جم ب جم ج (۲)
 جب ج جب \angle = جب \angle جب ج (۳)
 ضابطہ (۲) کو (۱) سے آسانی کے ساتھ حسب ذیل طریقہ پر حاصل

کیا جاسکتا ہے -
 ا ج کو (شکل ۱) \angle تک اتنا خارج کرو کہ

$$\text{ج } \angle = 90^\circ - \text{ب}$$



تب مثلث ب ا ه سے بموجب ضابطہ (۱)

$$\text{جم ب } \angle = \text{جب ج } \angle$$

اور مثلث ب ج ه سے (۲)

جم ب \angle = جم \angle جب ب - جب \angle جم ب جم ج
 جم ب \angle کی یہ دو قیمتیں مساوی رکھنے سے ضابطہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔
 اسی طرح نمونہ (۲) کے مختلف ضابطے، حافظہ پر زیادہ بار ڈالے
 بغیر، حسب ضرورت لکھ دیے جاسکتے ہیں۔

مساواتیں (۱)، (۲)، (۳) سادہ ترین مساواتیں ہیں جو اس وقت
 استعمال کی جاسکتی ہیں جبکہ کروی مثلث کے دو ضلع \angle اور ب اور درمیانی
 زاویہ ج دیے گئے ہوں اور اس کے اجزاء \angle اور ج معلوم کرنا مطلوب
 ہو۔ ہادی النظر میں یہ عجیب معلوم ہوتا ہے کہ صرف دو مقداروں کو درپیش
 کرنے کے لیے تین مساواتوں کی ضرورت پڑتی ہے۔ لیکن ٹھیک حل

حاصل نہیں ہو سکتا اگر ۱ اور ج کو معلوم کرنے کے لیے مساواتیں تین سے کم ہوں۔

مثلاً فرض کرو کہ صرف مساواتوں (۱) اور (۲) کا زوج دیا گیا ہے اور ۱ اور ج کی قیمتیں معلوم کر لی گئی ہیں جو ان مساواتوں کو پورا کرتی ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ یہی مساواتیں قیمتوں کے تین اور چٹوں $۱۸۰ + ۱ - ۳۶۰ - ج - ۳۶۰ - ۱ - ۸۰ - ۱ - ۳۶۰ - ج$ سے بھی پوری ہوتی ہیں۔ لیکن اگر یہ بھی مقصود ہو کہ جو قیمتیں اختیار کی جائیں وہ مساوات (۳) کو بھی پورا کریں تو قیمتوں کے آخری دو چٹوں کو خارج کر دینا پڑتا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جب مساواتیں (۱) (۲) اور (۳) سب کی سب ۱ اور ج سے پوری ہوتی ہوں تو ایک دو سرحل صرف $۱۸۰ + ۱ - ۳۶۰ - ج$ رہ جاتا ہے۔

اس باقی ماندہ ابہام کے متعلق یہ یاد رکھنا چاہئے کہ کرہ پر کے دو نقطوں ۱ اور ب کو ملانے والی بڑے دائرہ کی قوس کا طول بالعموم مبہم ہوتا ہے۔ یہ طول ۱ ب ہو سکتا ہے یا $۳۶۰ - ۱ ب$ ۔ اسی طرح اگر دو بڑے دائروں کے درمیانی زاوے کی تعریف اس قوس سے کی جائے جو دو خاص قطبوں کے درمیان ہو تو بھی یہاں یہ ابہام پیدا ہوگا کہ قطبوں کو ملانے والی دو قوسوں میں سے کونسی قوس زاویہ کا ناپ ہے۔ ہر مخصوص سوال کے حالات سے بالعموم یہ امر واضح ہوگا کہ ان دو حلوں ۱ ج یا $۱۸۰ + ۱ - ۳۶۰ - ج$ میں سے کونسا حل مطلوب ہے۔

اگر ایک ضلع اور دو متصلہ زاوے دئے جائیں تو دو نئے ضابطے (۴) اور (۵) ضابطہ (۳) کے ساتھ لینے ہوں گے

$$\text{جم ج} = \text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ج} \quad (۴)$$

$$\text{جم ج} + \text{جم ا} = \text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ج} \quad (۵)$$

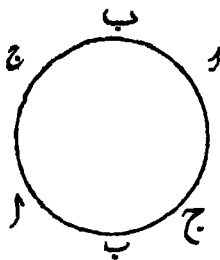
$$\text{جم ج} + \text{جم ا} = \text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ج} \quad (۳)$$

ضابطے (۴) اور (۵) علی الترتیب (۱) اور (۲) سے قطبی مثلث کا

(۳) عام اصول استعمال کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ وہ اصول یہ ہے کہ کوئی ضابطہ جو سب کروئی مثلثوں کے لیے درست ہو درست رہتا ہے اگر آپس میں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ب'، 'ج' کی بجائے قطبی مثلث کے اجزاء
 $۱۸۰ - ۱۸۰ - ۱۸۰ - ۱۸۰ - ۱۸۰ - ۱۸۰$ ج - ۱۸۰ - ۱۸۰ - ۱۸۰ - ۱۸۰ - ۱۸۰ - ۱۸۰
 ملی ترتیب درج کر دے جائیں۔

اگر دو ضلع اور ان کا درمیانی زاویہ یا دو زاوے اور درمیانی ضلع دے جائیں تو بھی مثلث ایسے ضابطوں سے حل ہو سکتا ہے جو (۲) اور (۳) سے آسانی کے ساتھ اخذ کئے جاسکتے ہیں اور جو اس نمونہ کے ہیں
 مم ا جب ب = مم ا جب ج + جم ب جم ج (۶)
 اگر 'ا'، 'ب' اور ج دے گئے ہیں تو اس ضابطہ سے مم ا کی تعیین ہوگی اور اس لیے ا معلوم ہوگا کیونکہ صفر اور ۱۸۰ کے درمیان ا کی ہمیشہ ایک قیمت ہوگی جو + ∞ سے - ∞ تک مم ا کی کسی قیمت کے جواب میں ہوگی۔ بلاشبہ ۱۸۰ + ا بھی ایک حل ہے۔
 اسی طرح اگر 'ا'، 'ج'، 'ب' دے گئے ہوں تو اس ضابطہ سے مم ا معلوم ہو سکے گا۔

یاد رہے کہ ضابطہ (۶) مثلث کے ایسے چار متصلہ اجزاء کے درمیان رشتہ کو ظاہر کرتا ہے جبکہ انہیں ایک دائرہ کے گرد لکھا جائے اب چونکہ ہم کسی ایک عنصر سے ابتدا کر سکتے ہیں اس لیے اس نمونہ کے چھ ضابطے ہیں۔



شکل (۲)

نمونہ (۶) کے ضابطوں کے لیے حسب ذیل قاعدہ دیا جاتا ہے:-

۱۰ دیکھو علم مثلث کروئی مصنفہ ٹوڈ ہنٹر صفحہ ۲۷ (۱۹۰۳ء)

ان ضابطوں میں سے کسی ایک میں شریک ہونے والے زاویوں اور ضلعوں میں سے ایک زاویہ دو ضلعوں کے درمیان واقع ہوتا ہے اس کو ”داخلہ زاویہ“ کہا جاسکتا ہے۔ اسی طرح ایک ضلع دو زاویوں کے درمیان واقع ہوتا ہے اس کو ”داخلہ ضلع“ کہا جاسکتا ہے۔ تب ضابطہ کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے :-

(داخلہ ضلع کی جیب التمام) (داخلہ زاویہ کی جیب التمام)
= (داخلہ ضلع کی جیب) (دوسرے ضلع کا ماس التمام)
- (داخلہ زاویہ کی جیب) (دوسرے زاویہ کا ماس التمام)
مثلاً چار اجزاء ا، ب، ج، د پر مشتمل ضابطہ لکھ لینے کے لیے
ج داخلہ زاویہ ہے اور د داخلہ ضلع پس ضابطہ (۶) حاصل ہوتا ہے
ا ج د ج = ج ب ا ج م ب - ج ب ج م ب
اگر دو ضلع ا، ج اور د کے مقابل کا زاویہ ا د کے جائیں تو
(۳) سے ج ب ج حاصل ہوتا ہے۔ اگر ج ب ج < اتویہ مسئلہ ناممکن
ہے۔ اگر ج ب ج > اتویہ ظاہر نہیں ہوتا کہ ج کو اس کی دو تکمیلی قیمتوں
میں سے کونسی قیمت دینی چاہئے اور جب تک کہ کوئی مزید بات معلوم
نہ ہو جس سے یہ ظاہر ہو سکے کہ ج حادثہ ہے یا منفرد یہ مسئلہ مبہم رہتا
ہے۔

اگر دو زاویے اور ان میں سے ایک کے مقابل کا ضلع دے
جائیں تو ضابطہ (۳) سے دوسرے زاویے کے مقابل کا ضلع معلوم ہوگا
جو حسب سابق اس ابہام کے تحت ہوگا جو قوس اور اس کے تکملہ کے درمیان ہوتا ہے
اگر ان دو صورتوں میں ابہام کو رفع کر لیا جائے تو یہ مسئلہ
اس مسئلہ میں تحویل ہو جاتا ہے جس میں دو ضلع اور ان دونوں ضلعوں
کے مقابل کے زاویے دے گئے ہوں۔ مساواتوں (۱) اور (۲) سے
حسب ذیل ضابطہ آسانی کے ساتھ اخذ کیا جاسکتا ہے

$$\text{مس ب} = \frac{\text{مس ا ج م ب} + \text{مس ج م ب}}{\text{مس ا ج م ب}}$$

اور (۲) سے یہ معلوم ہو گا کہ اس جملہ میں ب لینا چاہئے یا ۸۰ + ب -
 عمل حساب میں اختصار پیدا ہو گا اگر ہم یہ فرض کریں کہ
 مس طہ = مس ا جم ج مس فہ = مس ج جم ا
 اس لیے ب = طہ + فہ

قطبی مثلث سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس ب} = \frac{\text{مس ا جم ج} + \text{مس ج جم ا}}{\text{مس ا جم ج مس ج جم ا}}$$

جس سے ب معلوم ہوتا ہے کیونکہ ب اور ب + ۸۰ کے درمیان
 کا ابہام (۵) سے رفع ہو جاتا ہے۔ نیز اگر ہم رکھیں
 مس طہ = مس ا جم ج مس فہ = مس ج جم ا
 تو ب = ۸۰ - طہ - فہ

اگر کروئی مثلث کے تین ضلع دیے گئے ہوں تو اس کا حل حسب
 تفصیل ذیل معلوم کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ ۲ مس = ا + ب + ج تو

$$\text{مس } \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\text{جب (س - ب) جب (س - ج)}}{\text{جب مس جب (س - ا)}}} \quad (۷)$$

جس سے ا معلوم ہوتا ہے اور اسی طرح متشابه ضابطوں سے ب اور ج
 معلوم ہوتے ہیں۔

اگر تین زاویے ا، ب، ج دیے جائیں تو رکھو
 ۲ مس = ا + ب + ج

$$\text{مس } \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\text{جم مس جم (س - ا)}}{\text{جم (س - ب) جم (س - ج)}}} \quad (۸)$$

(۸)

جس سے ا معلوم ہوتا ہے اور اسی طرح ب اور ج۔

(۵) اگر مثلث قائم الزاویہ ہو تو اس اہم صورت میں ہم ج کو ۹۰ کے مساوی رکھتے ہیں اور (۱) (۲) (۳) کے مانند ضابطوں سے ثابت کر سکتے ہیں کہ

جب ج = ا = جم ل جب ب (۹)

جم ج = جم ل جب ب (۱۰)

جب ج جب ل = جب ل (۱۱)

جم ل = مس ب جم ج (۱۲)

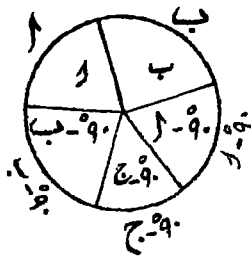
مس ل = مس ل قم ب (۱۳)

جم ل = جم ل قم ب (۱۴)

قط ج = مس ل مس ب (۱۵)

یہ ضابطے نیپیر کے قاعدوں کی مدد سے آسانی کے ساتھ لکھ لیے جاسکتے ہیں۔ اس میں مقداروں ل، ب، (۹۰ - ل)، (۹۰ - ج)، (۹۰ - ب)

کو جو اکثر ”دائری اجزاء“ کہلاتے ہیں ایک دائرہ میں حسب شکل (۳) لکھا جاتا ہے۔ کسی ایک دائری جزو کو ”درمیانی“ سمجھو تو اس کے طرفین کے اجزاء ”متصلہ“ کہلاتے ہیں اور باقی دو ”متقابلہ“۔ چہر نیپیر کے قاعدوں سے جو حسب ذیل ہیں (۱۰) تا (۱۵) ضابطوں کو لکھ لیا جاتا ہے :-



شکل (۳)

درمیانی کی جیب = متصلوں کے ماسوں کا حاصل ضرب،
درمیانی کی جیب = متقابلوں کی جیبوں کا حاصل ضرب
اس طرح دس ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں کیونکہ ان پانچ دائری اجزاء میں سے کسی ایک کو درمیانی جزو کے طور پر لے سکتے ہیں۔

اور (۲) سے یہ معلوم ہو گا کہ اس جملہ میں ب لینا چاہئے یا ۸۰ + ب۔
 عمل حساب میں اختصار پیدا ہو گا اگر ہم یہ فرض کریں کہ
 مس ط = مس ا، جم ج، مس ف = مس ج، جم ا
 اس لیے ب = ط + ف

قطبی مثلث سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس ب} = \frac{\text{مس ا، جم ج} + \text{مس ج، جم ا}}{\text{مس ا، جم ج، مس ج، جم ا}}$$

جس سے ب معلوم ہوتا ہے کیونکہ ب اور ب + ۸۰ کے درمیان
 کا ابہام (۵) سے رفع ہو جاتا ہے۔ نیز اگر ہم رکھیں
 مس ط = مس ا، جم ج، مس ف = مس ج، جم ا
 تو ب = ۸۰ - ط - ف

اگر کروی مثلث کے تین ضلع دیے گئے ہوں تو اس کا حل حسب
 تفصیل ذیل معلوم کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ ۲ = ا + ب + ج، تو

$$(۴) \quad \sqrt{\frac{\text{جب (س - ب) جب (ب - ج) جب (ج - س)}}{\text{جب س جب (س - ا)}}} = \frac{۱}{۲} \text{ مس}$$

جس سے ا معلوم ہوتا ہے اور اسی طرح متشابہ ضابطوں سے ب اور ج
 معلوم ہوتے ہیں۔

اگر تین زاویے ا، ب، ج دیے جائیں تو رکھو

$$۲ \text{ مس} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج}$$

$$\sqrt{\frac{\text{جم مس جم (س - ا)}}{\text{جم (س - ب) جم (ب - ج)}}} = \frac{۱}{۲} \text{ مس}$$

(۸)

جس سے ا معلوم ہوتا ہے اور اسی طرح ب اور ج۔

(۵) اگر مثلث قائم الزاویہ ہو تو اس اہم صورت میں ہم ج کو ۹۰ کے مساوی رکھتے ہیں اور (۱) (۲) (۳) کے مانند ضابطوں سے ثابت کر سکتے ہیں کہ

جب ج جم \angle = جم \angle جب ب (۹)

جم ج = جم \angle جب ب (۱۰)

جب ج جب \angle = جب \angle (۱۱)

جم \angle = مس ب جم ج (۱۲)

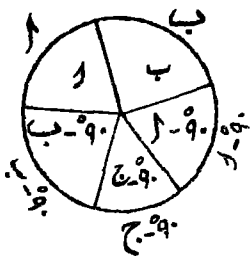
مس \angle = مس \angle قم ب (۱۳)

جم \angle = جم \angle قم ب (۱۴)

قج \angle = مس \angle مس ب (۱۵)

یہ ضابطے نیپیر کے قاعدوں کی مدد سے آسانی کے ساتھ لکھ لیے جا سکتے ہیں۔ اس میں مقداروں \angle 'ب' (۹۰ - \angle) (۹۰ - ج) (۹۰ - ب)

کو جو اکثر دائری اجزاء کہلاتے ہیں ایک دائرہ میں حسب شکل (۳) لکھا جاتا ہے۔ کسی ایک دائری جزو کو "درمیانی" سمجھو تو اس کے طرفین کے اجزاء "متصلہ" کہلاتے ہیں اور باقی دو "متقابلہ"۔ چتر نیپیر کے قاعدوں سے جو حسب ذیل ہیں (۱۰) تا (۱۵) ضابطوں کو لکھ لیا جاتا ہے :-



شکل (۳)

درمیانی کی جیب = متصلوں کے ماسوں کا حاصل ضرب
 درمیانی کی جیب = متقابلوں کی جیبوں کا حاصل ضرب
 اس طرح دس ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں کیونکہ ان پانچ دائری اجزاء میں سے کسی ایک کو درمیانی جزو کے طور پر لے سکتے ہیں۔

یہ آسانی سے بتلایا جاسکتا ہے کہ جب کبھی کسی کروئی مثلث کے دو ضلع اور ایک زاویہ، یا دو زاوے اور ایک ضلع دئے جائیں تو اس مثلث کو پینپیر کے قاعدوں کے ذریعہ حل کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ اس کے ایک راس سے مقابل کے ضلع پر عمود ڈالکر اسے دو قائم الزاویہ مثلثوں میں تقسیم کر دیا جائے (دیکھو مثال ۲ صفحہ ۱۱)۔

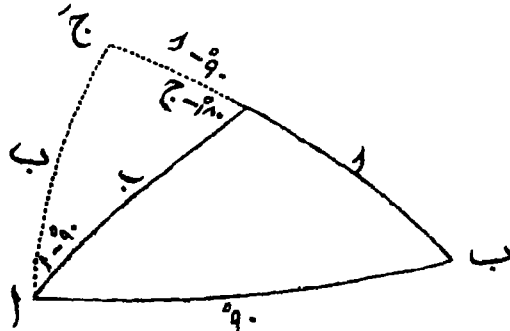
ربعی مثلث (ج = ۹۰) کے ضابطے بھی (شکل ۳) سے لکھ لئے جاسکتے ہیں۔ چنانچہ محیط کے بیرونی جانب جو دائری اجزاء لکھے گئے ہیں ان پر پینپیر کے قاعدوں کا استعمال کرنے سے ربعی مثلث کے دس ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً ۱ اور ۹۰۔ ب کو درمیان اجزاء لینے سے علی الترتیب ضابطے

$$\text{جب } ۱ = \text{جب } ۱ \text{ جب } ج$$

$$\text{جم } ب = \text{نس } ۱ \text{ جم } ج$$

اور حاصل ہوتے ہیں۔

(۶) قائم الزاویہ مثلث اور ربعی مثلث کے درمیان جو رشتہ یہاں مضمر ہے اسے شکل (۴) میں دکھایا گیا ہے۔ اگر ۱ جب ۹۰ اور $ج$ کو $ج$ تک اتنا خارج کیا جائے کہ $ج$ ۹۰ تو زاویہ $ج = ۹۰$ ، اب قائم الزاویہ مثلث (ج ج پینپیر کے قاعدوں کا استعمال کرنے سے ربعی مثلث ۱ جب ج کے ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔



شکل (۴)

لوکارتم۔ مروجہ ترقیم جو مثلثی تفاعلوں کے لوکارتم لکھنے میں استعمال کی جاتی ہے حسب ذیل مثال سے واضح ہوگی۔

۲۵ کی طبعی جیب التمام ۰۶۹۰۶۳۰۰۸ ہے اور

لوک جم ۲۵ = لوک ۰۶۹۰۶۳۰۰۸ - لوک ۱۰ = ۰۶۰۴۲۰۲۲

منفی لوکارتموں کے استعمال کی تکلیف سے بچنے کے لئے اسے بعض

اوقات ۰۶۹۵۰۲۰۰۶ لکھا جاتا ہے جو

۰۶۹۵۰۲۰۰۶ + ۱ =

کا قائم مقام ہے۔

ہم بالعموم جدولوں کے زیادہ مروج طریقہ کو اختیار کریں گے اور ہر مثلثی تفاعل کے لوکارتم میں ۱۰ کا اضافہ کریں گے۔ اس تبدیلی کے بعد لفظ لوک کی بجائے صرف ل استعمال کیا جائے گا۔ مثلاً پچھلی مثال میں ل کو ۰۶۹۵۰۲۰۰۶ لکھا جاسکتا تھا۔ زیادہ عام صورت میں

ل جم طہ = لوک جم طہ + ۱۰

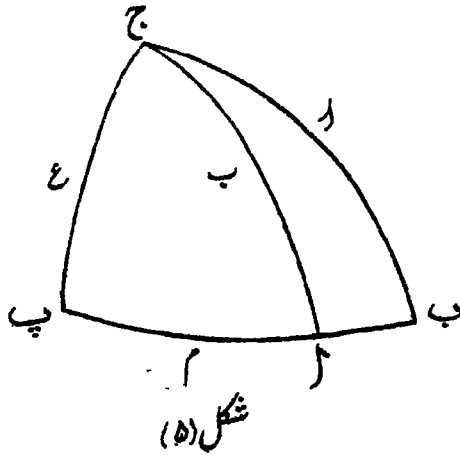
اگر اس امر کا ظاہر کرنا ضروری ہو کہ وہ مثلثی تفاعل جس کا لوکارتم لیا گیا ہے ایک منفی عدد ہے تو اس لوکارتم کے بعد ہم بالعموم (ن) لکھیں گے۔ مثلاً اگر کسی جملہ میں جم ۱۵۵ جزو ضربی کے طور پر واقع ہو تو ہم اس کا جدولی لوکارتم ۰۶۹۵۰۲۰۰۶ (ن) لکھیں گے جہاں ۰۶۹۵۰۲۰۰۶ = ل جم ۲۵۔

اکثر ایسا ہوتا ہے کہ کسی عمل حساب کے پہلے حصہ میں طہ متعین ہو جائے (۷) کے بعد اس کے بعض مثلثی تفاعلوں کو اس عمل حساب کے دو سرے حصہ میں استعمال کرنا پڑتا ہے۔ اس دو سرے حصہ عمل میں یہ تصفیہ کرنا پڑتا ہے کہ آیا ہم وہ ضابطہ استعمال کریں جو ل جب طہ پر منحصر ہے یا وہ ضابطہ جو ل جم طہ پر منحصر ہے۔ ہم جو ضابطہ چاہیں استعمال کر سکتے ہیں لیکن اگر طہ تقریباً صفر ہو یا تقریباً ۹۰ تو ان میں سے ایک ضابطہ غیر یقینی ہو جائے گا

لے ل کو جدولی لوکارتم کہتے ہیں۔

(۸) مثال ۲۔ قائم الزاویہ مثلثوں کے طریقہ سے ا اور ب معلوم کرو جبکہ

$$\begin{aligned} & \text{ا} = ۸۶^{\circ} ۱۳' ۲۴'' \\ & \text{ب} = ۵۷^{\circ} ۲۲' ۳۹'' \text{ ج} = ۱۸^{\circ} ۱۸' ۲۰'' = ۱۲۰^{\circ} ۱۲' ۳۶'' \\ & \text{ا ب پر عمود ج پ (= ع) کھینچو۔ تب} \\ & \text{ل ج ب ب } ۹۵۹۲۷۰.۴۳۲ \\ & \text{ج ب ل } ۹۵۹۳۶۶۰.۷۷ \\ & \text{ج ب ع } ۹۷۸۶۳۶۵۰.۹ \text{ ع = } ۵۸^{\circ} ۵۵' ۵۰'' \\ & \text{م س ب } ۱۰۷۱۹۹۳۴۵۴ \\ & \text{ج م (ا۔) } ۹۷۷۰۱۷۱۵۴ \\ & \text{م س م } ۹۷۹۰۱۰۶۰۸ \text{ م = } ۳۸^{\circ} ۳۱' ۳۵'' \\ & \text{ج م ع } ۹۷۸۳۴۳۲۹۱ \\ & \text{ج م (ج+م) } ۹۷۷۲۶۲۶۸۴ \\ & \text{ج م ا } ۹۷۵۶۰۵۹۷۵ \text{ ا = } ۶۸^{\circ} ۴۰' ۴۸'' \\ & \text{م س ع } ۱۰۷۰۲۹۳۲۱۸ \\ & \text{ق م (ج+م) } ۱۰۷۰۷۲۳۸۸۷ \\ & \text{م س ب } ۱۰۷۱۰۱۷۱۰۵ \text{ ب = } ۵۵^{\circ} ۳۸' ۵۵'' \end{aligned}$$



۲۔ ڈلمبر اور نیپیر کی تمثیلات۔

علم ہیئت کروی میں حسب ذیل مساواتیں بڑی فائدہ مند ہیں:-

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} (1-b) = \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} (1-b) \quad (16)$$

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} (1-b) = \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} (1+b) \quad (17)$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} (1+b) = \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} (1-b) \quad (18)$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} (1+b) = \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} (1+b) \quad (19)$$

یہ مساواتیں گاؤس (Gauss) کی تمثیلات کے نام سے بھی مشہور ہیں مگر ان کا انکشاف فی الحقیقت ڈلمبر نے کیا تھا۔

ڈلمبر کی تمثیلات چونکہ لوگاریتمی عمل حساب میں ضابطوں (1)، (2)، (3) اور (4)، (5)، (6) کی بہ نسبت زیادہ سہولت و آسانی پیدا کرتی ہیں اس لیے کروی مثلثوں کے حل کرنے میں جبکہ 'ا' ب اور ج یا 'ا' ب اور ج دے گئے ہوں انہیں ترجیح دیکھتی ہے۔

ان ضابطوں کا یاد رکھنا اکثر تکلیف دہ ہے جب تک کہ سر امبو (Rambaut) کے قاعدہ سے مدد نہ لی جائے۔

ہم مقداروں کی یہ دو صفیں

$$\frac{1}{p} (1+b), \frac{1}{p} (1-b), \frac{1}{p} \text{ ج}$$

$$\frac{1}{p} (1+b), \frac{1}{p} (1-b), \frac{1}{p} \text{ ج}$$

لے اس بیان اور ان ضابطوں کے لیے دیکھو علم مثلث کروی مصنفہ ٹوڈ ہنٹر صفحہ ۳۶-۳۷-۱۹
لے دیکھو ڈاکٹر اس۔ اے رامبو "Astronomische Nachrichten, No. 4135."

لکھتے ہیں جہاں ج = ۱۸۰ - ج - تب سراہبو کا قاعدہ حسب ذیل ہے:- (۹)
ایک صف میں کا مجموعہ (فرق) ہمیشہ دوسری صف کی جیب التمام

(جیب) کے ساتھ وابستہ ہوتا ہے۔

چنانچہ ڈلمبر کی وہ تمثیل جس میں جب $\frac{1}{4}$ (۱-ب) شامل ہے حاصل کرنے کے لیے سراہبو کے قاعدے سے مستنبط ہوتا ہے کہ

(۱) $\frac{1}{4}$ ج جیب کے ساتھ داخل ہونا چاہئے کیونکہ ۱ اور ب ایک فرق کے طور پر داخل ہوتے ہیں،

(۲) ۱ اور ب فرق کے طور پر داخل ہونے چاہئیں کیونکہ

$\frac{1}{4}$ (۱-ب) جیب کے ساتھ داخل ہوتا ہے،

(۳) $\frac{1}{4}$ (۱-ب) جیب کے ساتھ داخل ہونا چاہئے کیونکہ ۱ اور ب فرق کے طور پر داخل ہوتے ہیں،

(۴) $\frac{1}{4}$ ج جیب کے ساتھ داخل ہونا چاہئے کیونکہ ۱ اور ب فرق کے طور پر شامل ہوتے ہیں۔

پس یہ تمثیل لکھی جاسکتی ہے

جب $\frac{1}{4}$ ج جب $\frac{1}{4}$ (۱-ب) = جب $\frac{1}{4}$ ج جب $\frac{1}{4}$ (۱-ب)

= جم $\frac{1}{4}$ ج جب $\frac{1}{4}$ (۱-ب)

ڈلمبر کی تمثیلات کے استعمال کی وضاحت کے لیے ہم وہ کردی مثلث

لے سکتے ہیں جس میں

$$۱ = ۵۷^{\circ} ۲۸' ۶۲'' \quad ، \quad ۱ = ۳۶^{\circ} ۲۶' ۹''$$

$$ب = ۳۹^{\circ} ۲۲' ۵۰'' \quad ، \quad ب = ۳۰^{\circ} ۲۹' ۰۱''$$

$$ج = ۶۶^{\circ} ۲۵' ۶'' \quad ، \quad ج = ۲۹^{\circ} ۱۱' ۱۳''$$

ہم فرض کریں گے کہ ۱ 'ب' ج دے گئے ہیں اور ۱ 'ب' اور

ج مطلوب ہیں۔

نیچے لکھی ہوئی عددی قیمتیں متناظر مثالی تفاعلوں کے جدولی لوکارٹم ہیں۔

$$3450 - 3500 = 7 \frac{1}{4}$$

$$250 \text{ فرس } = (b-1) \frac{1}{4} \quad 2750 \text{ فرس } = (b+1) \frac{1}{4}$$

جب $\frac{1}{4}$ (1-ب) ۸۵ ۶۴۸۶۲۸۶

93906060 7.17

$$۳۹۳۳۸۶۳ = \text{جیب } \frac{۱}{۲} \text{ جیب } \frac{۱}{۲} (۱ - \text{ب})$$

جب $\frac{1}{4}$ (1 + ب) ۹۵۹۳۸۶۵۲

جب ۱/۲ ج ۱-۱۳۳۰۱۳۴۰۹

$$53 \dots 9, 32 = \text{جب } \frac{1}{2} \text{ ج } \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ (ا-ب)}$$

۹۹۹۹۵۷۹. ج. ۱ (۱-ب)

959854548 ج 1/2

$$959853248 = \frac{1}{2} \text{ جم } + \frac{1}{4} \text{ ج جب } + \frac{1}{8} \text{ (ا+ب)}$$

954954999 $\frac{1}{4}(b+1)$

جب ۱۰ ج ۹۶۴-۱۳۳۰-۱

$$\frac{1}{4} \text{ جم } \frac{1}{4} \text{ ج } = 9, 9483 \dots \text{ (ب)}$$

جم ۱۰۰۰ جب ۱۰۰ (۱+ب) ۹۶۹ ۸۵۳۲۶۸ ۱۰۰ (۱+ب) ۱۰۰۰

جیم $\frac{1}{4}$ ججم $\frac{1}{4}$ (ب) ۹۵۰۹۶۸۳ .. $\frac{1}{4}$ (ب-ا)

مس 1/2 (ب+ا) 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000 1001 1002 1003 1004 1005 1006 1007 1008 1009 1010 1011 1012 1013 1014 1015 1016 1017 1018 1019 1020 1021 1022 1023 1024 1025 1026 1027 1028 1029 1030 1031 1032 1033 1034 1035 1036 1037 1038 1039 1040 1041 1042 1043 1044 1045 1046 1047 1048 1049 1050 1051 1052 1053 1054 1055 1056 1057 1058 1059 1060 1061 1062 1063 1064 10

جیب $\frac{1}{2}$ جیب $\frac{1}{2}$ (ب-ا) $\frac{1}{4}$ ۸۵۹۳۴۳۸۹۴ (ب+ا) $\frac{1}{4}$ ۳۳۸۸۲

جیب $\frac{1}{2} ج$ جم $\frac{1}{2} (ب-ا)$ ۵۳ - - - ۹۳۳۴ $\frac{1}{2} (ب-ا)$ ۱۱۹۳۳

مس ۱ (۱-ب) ۹۵۲۹۴۳۸۱۱ ب = ۲۰۲۹۵۱

جیب $\frac{1}{2}$ حجم $\frac{1}{2}$ (ب-ا) ۹۵۳۴۰۰۰۵۳

۱۔ جب $\frac{1}{4}$ ج جب $\frac{1}{4}$ (ا-ب) کی بجائے ہم اس کو ترجیح دیتے ہیں کیونکہ
جم $\frac{1}{4}$ (ا-ب) < جب $\frac{1}{4}$ (ا-ب) - دیکھو صفحہ ۱۰۔

۹۵۶۹۱۷۳۵۲	جم $\frac{1}{4}$ (ب-ا)
۹۵۳۴۸۲۷۰۱	جب $\frac{1}{4}$ ج
۹۵۹۸۵۳۲۶۸	جم $\frac{1}{4}$ ج جب $\frac{1}{4}$ (ا+ب)
۹۵۹۹۶۴۰۱۲	جب $\frac{1}{4}$ (ا+ب)
۹۵۹۸۸۹۲۵۶	جم $\frac{1}{4}$ ج
۹۵۳۴۸۲۷۰۱	جب $\frac{1}{4}$ ج
۹۵۹۸۸۹۲۵۶	جم $\frac{1}{4}$ ج
۹۵۳۵۹۳۴۴۵	مس $\frac{1}{4}$ ج
اس لیے ا = ۹۳ ۴۶ ۳۶ ، ب = ۲۹ ۷۰ ۳۰ ، ج = ۲۵ ۴۶ ۶۴	
ڈبلر کی تمثیلوں سے حسب ذیل چار ضابطے آسانی کے ساتھ حاصل ہوتے ہیں، یہ ضابطے نیپیر کے تمثیلوں کے نام سے مشہور ہیں۔	
مس $\frac{1}{4}$ (ا+ب) =	جم $\frac{1}{4}$ (ب-ا) مس $\frac{1}{4}$ ج (۲۰)
مس $\frac{1}{4}$ (ب-ا) =	جب $\frac{1}{4}$ (ا-ب) مس $\frac{1}{4}$ ج (۲۱)
مس $\frac{1}{4}$ (ا+ب) =	جم $\frac{1}{4}$ (ب-ا) مم $\frac{1}{4}$ ج (۲۲)
مس $\frac{1}{4}$ (ب-ا) =	جب $\frac{1}{4}$ (ب-ا) مم $\frac{1}{4}$ ج (۲۳)
نیپیر کی تمثیلوں کے ذریعہ مثلث کا حل معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل	

۱۔ جم $\frac{1}{4}$ ج جم $\frac{1}{4}$ (ا+ب) کی بجائے ہم اس کو ترجیح دیتے ہیں
کیونکہ جب $\frac{1}{4}$ (ا+ب) < جم $\frac{1}{4}$ (ا+ب)

مثال دی جاتی ہے۔

ا = $23^{\circ} 24'$ ، ب = $15^{\circ} 2'$ ، ج = $29^{\circ} 24'$
ہم چار ہندسی نوکار تم استعمال کریں گے جو اکثر مقاصد کے لیے کافی صحیح ہیں۔

ل جم $\frac{1}{4}$ (ب-ا) = 919956 ، ل جب $\frac{1}{4}$ (ا-ب) = 911389

ل قط $\frac{1}{4}$ (ا+ب) = 0.158 ، ل قم $\frac{1}{4}$ (ا+ب) = 0.5442

ل مس $\frac{1}{4}$ ج = 918809 ، ل مس $\frac{1}{4}$ ج = 918809

ل مس $\frac{1}{4}$ (ا+ب) = 918923 ، ل مس $\frac{1}{4}$ (ا-ب) = 914040

$\frac{1}{4}$ (ا+ب) = 5834 ، $\frac{1}{4}$ (ا-ب) = 222

ا = 60° ، ب = $15^{\circ} 56'$

اب چونکہ $\frac{1}{4}$ (ا-ب) اور $\frac{1}{4}$ (ا+ب) دونوں $> 90^{\circ}$ ایسے ج معلوم

کرنے کے لیے ضابطہ (۲۲) مناسب ہے جسے لکھا جاسکتا ہے

مس $\frac{1}{4}$ ج = جم $\frac{1}{4}$ (ا-ب) قط $\frac{1}{4}$ (ا+ب) مم $\frac{1}{4}$ (ا+ب)

پس ل جم $\frac{1}{4}$ (ا-ب) = 919941

ل قط $\frac{1}{4}$ (ا+ب) = 0.1033

ل مم $\frac{1}{4}$ (ا+ب) = 0.5612

ل مس $\frac{1}{4}$ ج = 91318 ، ج = $153^{\circ} 23'$

۳۔ صحت جو نوکاری عمل حساب میں حاصل ہو سکتی ہے۔

جب کسی مثلثی تفاعل کا نوکار تم دیا جاتا ہے تو بالعموم کافی صحت کے ساتھ زاویے کا معلوم کرنا ممکن ہے۔ لیکن اکثر ایسی صورتیں پیش آتی ہیں

جن میں یہ بیان کلاً درست نہیں ہوتا۔
مثلاً فرض کرو کہ ہم اپنے لوکارتموں میں صرف پانچ ہندسے رکھتے ہیں اور چاہتے ہیں کہ طہ رشتہ ذیل سے معلوم ہو

$$لی جب طہ = ۹۸۹۹۹۹۹$$

اس رشتہ سے اس سے زیادہ معلوم نہیں ہوتا کہ طہ ۹۸۹۹۹۹۹ اور ۹۸۹۹۹۹۹ کے درمیان کہیں واقع ہونا چاہیئے۔ اگر ہم لوکارتموں میں اعشاریہ کے سات مقامات بھی استعمال کریں تو بھی اب ہم ہمیشہ رفع نہیں ہو سکتا۔ مثلاً ہم دیکھتے ہیں کہ ۹۸۹۹۹۹۹ سے ۹۸۹۹۹۹۹ تک ہر زاویہ کے لی جب کی وہی جدولی قیمت ۹۸۹۹۹۹۹۹۹ ہے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ ۹۰ کے قریب زاوئے لی جب سے ابھی طرح متعین نہیں ہوتے۔ اسی طرح صفر کے قریب زاوئے لی جم سے اچھی طرح متعین نہیں ہوتے۔ لیکن سب زاوئے لی مس سے صحت کے ساتھ معلوم کئے جاسکتے ہیں جیسا کہ اب ہم ثابت کریں گے۔ اگر طہ میں ایک چھوٹا اضافہ ۱ یا ۲ جب اردائری تاپ میں کیا جائے اور لی مس ط میں اعشاریہ کے ۷ ویں مقام میں لا اکائیوں کا اضافہ ہو تو وہ اور لا کے درمیان مساوات معلوم کرنا ہوگا۔

عام لوکارتموں کو نیپیری لوکارتموں میں مقیاس ۴۳۴۳ کے (۱۲) ذریعہ تبدیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$لا \dots\dots\dots = ۴۳۴۳. لوک مس (ط + ۷ جب آ) - ۴۳۴۳. لوک مس ط$$

$$= ۴۳۴۳. لوک (۱ + ۷ جب آ مم طہ)$$

$$- ۴۳۴۳. لوک (۱ - ۷ جب آ مس ط)$$

اس لئے ان لوکارتموں کو پھیلانے سے
لا = ۴۳۴۳... جب آ (مس ط + مم طہ) ۷ تقریباً

اسے لکھا جاسکتا ہے

۴۲ = لا جب ۲ طہ ۱۱ ۲۲
 ۴۲ کی بڑی سے بڑی قیمت لا ۱۱ ۲۲ ہے اس لئے طہ کی محسوبہ قیمت
 جبکہ ل مس طہ دیا گیا ہو غلط نہیں ہو سکتی الا انکہ ل مس طہ خود
 ۴۲ ۰۰۰۰۰ کی حد تک غلط ہو۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ جب پانچ ہندسی نوکاتم استعمال کئے جائیں اور
 عمل حساب آخری اعشاریہ میں دو اکائیوں کے اندر تک ٹھیک ہو تو کسی زاویے
 کی خطا جو اس کے ماس سے متعین کیا گیا ہو ۵ ثانیوں سے بڑھ نہیں سکتی۔

مثال ۲۔ کسی زاویے کے ل جب کے آخری اعشاریہ میں ایک
 اکائی کے تغیر سے اس زاویہ کی قیمت میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس کی تحقیق
 کرو اور بتاؤ کہ تمام صورتوں میں زیادہ صحت اس میں ہے کہ اس زاویہ کو اس کی جیب
 کی بجائے اس کے ماس سے متعین کیا جائے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ اگر طہ ایک چھوٹا زاویہ ہو تو اس کی قیمت
 ثانیوں میں اس جملہ

قم آ جب طہ (قط طہ) ۱

سے تقریبی طور پر حاصل ہوتی ہے اور بتاؤ کہ اگر طہ ۱۰ کے اتنا بڑا بھی ہو تو یہ جملہ آ
 کی حد تک غلط نہیں ہوگا۔

مثال ۴۔ اگر طہ ایک چھوٹا زاویہ ہو جسے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہے
 تو ثابت کرو کہ

ل جب طہ = لوک طہ + س

جہاں س = $\frac{1}{3} (۲۰ + ل جم طہ) - ۵۱۲۲۱۳۳۰۵$
 اور مثلاً ثابت کرو کہ اگر طہ = ۲۰.۷۴۲۰ تو

ل جب طہ = ۸۲.۴۱۸۲

مقدار میں برہن (Bruhn) کی جدولوں میں دی جاتی ہے۔

مثال ۵۔ طہ کی قیمت معلوم کرو اگر ل جب طہ = ۸۶.۱۲۳۴۵۶

اُن جدولوں سے جو بیگے (Bagay) کی جدولوں کی مانند ہوں ہر ثانیہ کیلئے مثلثی تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ ان سے معلوم ہو گا کہ مطلوبہ زاویہ ۳۵° $۳۲'$ سے زیادہ فرق نہیں رکھتا اور یہ فرق ایک ثانیہ کی چھوٹی کسر سے زیادہ نہیں ہے۔ اس کسر کو معلوم کرنے کے لیے ہم $\frac{1}{3} = (۲۰ + \text{لی جم طہ}) - ۵۳۱۴۲۵۱$ کا حساب لگاتے ہیں جو لی جم طہ میں طہ کی بجائے ۳۵° $۳۲'$ درج کرنے سے ۲۱۶۸۵۵۶۷۲ ہو جاتا ہے۔

تب مساوات $\text{لوک طہ} = \text{لی جب طہ} - \text{س سے}$
 $\text{طہ} = ۲۱۶۸۵۵۶۷۲$

۴۔ کروئی مثلث میں تفرقی ضابطے۔

کوئی چھ زاوے $\text{ا' ب' ج' د' ه' و' ز'}$ بالعموم کروئی مثلث کے ضلع اور زاوے نہیں ہوں گے۔ اگر ایسا ہو تو ان زاویوں کو تین شرطیں پوری کرنی ہوں گی۔ یہ اس امر سے ظاہر ہے کہ اگر فی الواقعہ یہ چھ مقداریں ایک مثلث کے اجزاء ہیں تو ان میں سے کوئی تین دئے جانے پر دوسری تین مقداریں متعین ہوتی چاہئیں۔

مان لو کہ یہ چھ مقداریں فی الواقعہ ایک کروئی مثلث کے اجزاء ہیں اور فرض کرو کہ ان سب میں علی الترتیب چھوٹے اضافے $\text{ا' مف ب' ج' د' ه' و' ز'}$ مف ب' ج' د' ه' و' ز' کے لئے گئے ہیں۔ ان مقداروں کو اس طرح متغیر کرنے کے بعد وہ بالعموم کسی کروئی مثلث کے اجزاء نہ رہیں گے۔ اگر وہ کسی کروئی مثلث کے اجزاء ہوں تو انہیں تین شرطیں پوری کرنی چاہئیں جنہیں ہم اب معلوم کریں گے۔

اساسی ضابطہ

$\text{جم ا'} = \text{جم ب' جم ج'} + \text{جم ج' جب ب' جم ا'}$

کو تفرق کرو تو

$\text{جب ا' مف ا'} = \text{جب ب' جم ج' مف ب'} - \text{جم ب' جب ج' مف ج'}$

+ جم ب جب ج . جم ا مف ب + جب ب جم ج . جم ا مف ج
- جب ب جب ج جب ا مف ا

لیکن دفعہ (۱) کے ضابطہ (۲) سے

جب ا جم ب = جم ب جب ج - جب ب جم ج . جم ا
جب ا جم ج = جب ب جم ج - جم ب جب ج . جم ا
اس لئے درج کرنے اور متشابہ ضابطوں کو ساتھ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے
مف ا = جم ج مف ب + جم ب مف ج + ہ جب ب جب ج مف ا
مف ب = جم ا مف ج + جم ج مف ا + ہ جب ج جب ا مف ب (۱)
مف ج = جم ب مف ا + جم ا مف ب + ہ جب ا جب ب مف ج
جہاں ہ = جب ا | جب ا = جب ب | جب ب = جب ج | جب ج

اسی طرح عمل کرو تو ضابطوں (۴) اور (۵) سے حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوں گی
مف ا = جم ج مف ب - جم ب مف ج + ہ جب ب جب ج مف ا
مف ب = جم ا مف ج - جم ج مف ا + ہ جب ج جب ا مف ب (۲)
مف ج = جم ب مف ا - جم ا مف ب + ہ جب ا جب ب مف ج
پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ اگر 'ب' 'ج' 'ا' 'ب' 'ج' ایک کردی
مثلث کے اجزاء ہوں تو مساواتوں (۴) یا (۲) میں سے کسی ایک جٹ سے وہ تین
ضروری اور کافی شرطیں بیان ہوتی ہیں کہ

ا + مف ا = ب + مف ب = ج + مف ج + ہ
بھی ایک کردی مثلث کے اجزاء ہوں -

(۱۲) اگر ان تفرقوں میں سے تین صفر ہوں تو بقیہ تین تفرقے بھی بالعموم صفر
ہوں گے - یہ امر مساواتوں سے ظاہر ہے اور نیز اس امر سے بھی کہ اگر کسی
کردی مثلث کے تین اجزاء نہ بدلیں تو دوسرے تین اجزاء بھی بالعموم نہیں بدلیں گے -
اس بیان کی ایک مستثنیٰ صورت ذیل کی مثال سے ملتی ہے - فرض
کرو کہ ج = ۹۰ اور مف ب = ۰ مف ج = ۰ مف ب = ۰ - اس صورت میں

جیسی مخصوص صورتیں شامل ہیں۔
 فرض کرو کہ لا کو ایک قیمت صفروی گئی ہے تو اس کے جواب میں
 م کی قیمت ما، رشتہ ما = ف (۱) سے حاصل ہوگی۔ فرض کرو کہ اس کے
 بعد (۱) میں لا کی بجائے متواتر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ درج کئے گئے ہیں
 اور ان کے جواب میں م کی قیمتیں علی الترتیب ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما حاصل
 ہوتی ہیں۔ تب کسی جدول کا لازمی خاصہ یہ ہے کہ اس کے ایک
 ستون میں ہم لا کی قیمتیں یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ رکھتے ہیں اور دوسرے
 ستون میں م کی متناظر قیمتیں یعنی ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما رکھتے ہیں۔

لا کی قیمت جسے اکثر دلیل کہتے ہیں مساوی وقفوں ۱ سے برابر
 آگے بڑھتی ہے اور م کی ہر متناظر قیمت کو جسے اکثر تفاعل کہتے ہیں اتنی زیادہ
 صحت کے ساتھ محسوب کیا جاتا ہے جتنی اس مقصد کے لیے ضروری ہے جس کے
 لیے جدول تیار کی جا رہی ہے۔

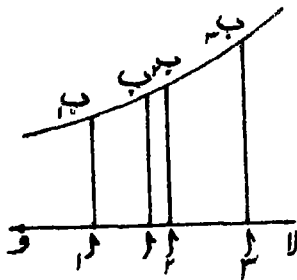
ما = ف (لا) کی جدول

لا	ما
۰	ما
۱	ما
۲	ما
۳	ما
.....

ایسی کسی جدول کی غایت یہ ہوتی ہے کہ اس سے دلیل کی دی ہوئی
 قیمت کے جواب میں تفاعل کی قیمت معلوم ہو یا تفاعل کی دی ہوئی قیمت
 کے جواب میں دلیل کی قیمت معلوم ہو۔

اکثر ایسا ہوتا ہے کہ تفاعل کی عددی قیمت کو ایسی دلیل کے جواب میں معلوم کرنا ہوتا ہے جبکہ یہ دلیل صریحاً جدول میں موجود نہ ہو بلکہ وہ دلیل کی دو متصلہ جدولی قیمتوں کے درمیان واقع ہو۔ اس کا عکس بھی اکثر درپیش ہوتا ہے یعنی تفاعل کی دی ہوئی قیمت کے جواب میں دلیل کی قیمت معلوم کرنا پڑتا ہے جبکہ تفاعل کی دی ہوئی قیمت دو متصلہ جدولی قیمتوں کے درمیان واقع ہو۔ لیکن یہ پہلے یہ خیال آئے کہ ان میں سے کسی صورت میں ہم اصلی مساوات (آ) کی طرف رجوع ہوں اور اس سے مطلوبہ قیمتیں معلوم کریں۔ لیکن یہ ضروری نہیں ہے تفاعلی رشتہ کی خاصیت جدول میں اس قدر سرایت کر جاتی ہے کہ جب 'لا' اور 'ما' میں سے کوئی ایک دیا جائے تو دوسرا 'ب' بنی اور 'ج' کے فن سے جسکی تشریح اب کی جائے گی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اس فن کی نوعیت سب سے زیادہ صاف طور پر علم ہندسہ کے ذریعہ واضح کی جاسکتی ہے۔ ہم شخصی ما = ف (لا) کو معمولی طریقہ سے مرتب کر سکتے ہیں۔ مبداء و سے محور لا پر نقطوں 'لا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ه'، 'و' کا نشان لگاؤ جو و سے علی الترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ فاصلوں پر ہوں۔ ضابطہ ما = ف (لا) سے ما کی متناظر قیمتیں ما، 'ما'، 'ما'، 'ما'، 'ما'، 'ما'، 'ما'، 'ما'، 'ما'، 'ما' پھر 'لا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ه'، 'و' پر متعین 'لا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ه'، 'و' قائم کرو جو علی الترتیب قیمتوں 'ما'، 'ما'، 'ما'، 'ما'، 'ما'، 'ما' کے مساوی ہوں۔ نقطے 'ب'، 'ب'، 'ب' وغیرہ بالعموم ایسے واقع ہوں گے کہ ان میں سے گذرتا ہوا ایک منحنی صاف طور پر کھینچا جاسکے گا۔ اگر نقطے 'لا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ه'، 'و' کافی طور پر باہم نزدیک ہوں یعنی اگر ہ کافی

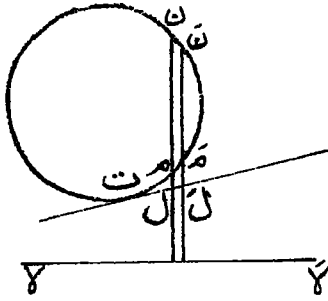


شکل (۶)

چھوٹا ہو تو منحنی کے شعریں اس قدر صاف طور پر واضح ہوں گی کہ کسی قسم کے ابہام کا بہت کم امکان ہوگا۔ درحقیقت ما = ف (لا) جو اب 'ب' کے بعد 'ب' کے بعد میں سے گذرتا ہے۔ ان دونوں کے اندر اثر منحنی سے زیادہ فریت نہیں رہے گا جو ابھی ان نقطوں میں سے کہینچا گیا ہے۔ بلاشبہ حقیقی منحنی تقابل ما = ف (لا) کی نوعیت پر منحصر ہوگا۔ لیکن چونکہ بینی اور ان کے فن میں بھی منحنی کے صرف ایک چھوٹے حصے سے واسطہ رہے گا اس لیے زیر بحث منحنی کی مخصوص خاصیتوں پر غور کرنا غیر ضروری ہے۔

پس جو دو نقطہ کے لیے اس منحنی ما = ف (لا) کا استعمال ضروری نہیں ہے بلکہ کسی شعری منحنی کا۔ ہم پہلے شعری دائرہ لیتے ہیں جو بینی اور ان کی حد تک کمالی ہو۔ پہنچ ہو۔ بانہوم ایسا دائرہ کھینچنا ممکن ہوتا ہے جس کی قوس دے ہوئے منحنی کی قوس کے ساتھ کسی دے ہوئے نقطہ پر اس قدر منحنی ہو کہ چھوٹے فاصلے کے لئے دائرہ کا منحنی سے اختلاف ناقابل قدر ہو۔ اس لیے ہم اس چھوٹے حصے کو جس سے ہمیں واسطہ ہے دائری قوس کے طور پر تصور کرتے ہیں خود اصل منحنی کچھ بھی ہو۔ چنانچہ ہم 'ب' 'ب' 'ب' میں سے گذرتا ہوا ایک دائرہ کھینچتے ہیں اور مان لیتے ہیں کہ 'ب' اور 'ب' کے درمیان کسی نقطہ 'ب' کے لیے دائرہ کا معین 'لا' کی قیمت کے جواب میں 'ما' کی قیمت ہے۔ مثلاً اگر 'اب' معین ہو تو 'اب' تقابل کی قیمت ہے جبکہ 'ر = و'۔ ہم 'اب' کے لیے ایک جملہ معلوم کرنے میں اس دائرہ کا استعمال کریں گے جس جملہ میں صرف نقطہ 'ب' کا فضلیہ اور نقاط 'ب' 'ب' 'ب' کے محدود شریک ہوں گے۔ بلاشبہ یہ 'ما' کی وہ قیمت نہیں ہوگی جو ضابطہ ما = ف (لا) سے حاصل ہوتی ہے لیکن اس سے زیادہ فرق بھی نہیں کھینچی۔

فرض کرو کہ ت م ص د ن ان ایک دائرہ ہے اور ت پر اس کا ما س ت ل ل ہے۔ فرض کرو کہ ل ل ن اور ل ن دو خط ہیں جو دونوں محور لا پر عمود ہیں۔ تب دائرہ کی خاصیت کی رو سے



شکل (۴)

$$ل م : ل ن = ل ت : ل ن$$

$$ل م \times ل ن = ل ت \times ل ن$$

اس لیے

$$\frac{ل م}{ل ن} = \frac{ل ت}{ل ن}$$

اب فرض کرو کہ ل ن

اور ل ن ت کے انتہائی

قریب آتے ہیں تب $\frac{ل ن}{ل ن} = ۱$ اور

$$ل م : ل ن :: ل ت : ل ن$$

اب چونکہ نقطہ تماس کے قرب میں منحنی کی قوس اس کے لمبی دائرہ کی قوس سے ناقابل امتیاز ہے اس لیے ہمیں بنی ادرج کا اصول حاصل ہوتا ہے جسے اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے :-

اگر تماس ل ت کھینچا گیا ہو جو منحنی کو ت پر مس کرتا ہے اور ت کے متصل ل م ایک معین ہو تو تماس اور منحنی کے درمیان معین کا مقطوعہ ل م ت ل کے مربع کے متناسب ہوگا۔

شکل (۸) میں و مبداء

ب کا معین ما اور ت کا معین

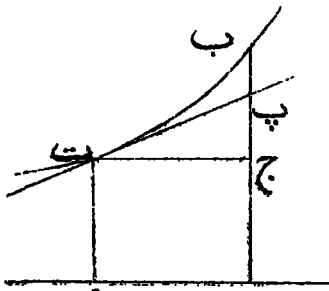
ما ہے۔ پس ب پ ایسے

بدلتا ہے جیسے ب ت اور

اس لیے ایسے بدلتا ہے جیسے

ج ت۔ نیز ج پ ایسے

بدلتا ہے جیسے ج ت۔ پس



شکل (۸)

اگر ب کا فصل لا ہو تو

ما - با = ل لا + م لا
جہاں ل اور م ت کے قریب نقطوں کے لیے مستقل ہیں۔ صریحاً یہ ایک
رہنمائی کی مساوات ہے۔ مستقلوں ل اور م کو ر اور م میں بدل کر ہم مساوات بالا کو
لکھ سکتے ہیں

ما + با + ل لا + م لا (لا - لا)
ہم ل اور م کو اس امر پر غور کر کے معلوم کرتے ہیں کہ (ما، م)، (لا، لا)
شعری پر کے نقطے ہوں۔ پہلے نقطہ سے حاصل ہوتا ہے

$$ل = \frac{ما - با}{لا - لا}$$

اور (۱۸) لا = م، ما = م رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$م = با + (ما - با) + م$$

$$م = \frac{ما - با + م}{لا - لا}$$

اور اس لیے مساوات ہو جاتی ہے

$$ما = با + \frac{لا - لا}{لا - لا} + (ما - با) + م = با + م + (ما - با) + م = ۲ما - با + م$$

فرض کر دو کہ تفاعل ما کی تین متصل قیمتیں با، م، ما ہیں جہاں ہ
دلیل کی دوسری اور پہلی قیمتوں کے درمیان فرق ہے اور نیز تیسری اور
دوسری قیمتوں کے درمیان۔ پس کسی دلیل کے جواب میں جو پہلی دلیل سے
بقدر لا سکے بڑی ہو لیکن دوسری دلیل سے چھوٹی ہو مندرجہ بالا
ضابطہ سے تفاعل کی مطلوبہ قیمت حاصل ہوتی ہے۔

اس ضابطہ میں جو مستقل ہیں ان کی قیمتیں بہت آسانی کے ساتھ
جدول سے فرقوں کے طریقہ کے ذریعہ حاصل ہوتی ہیں:-

فرق دوم

فرق اول

ما

ما - ما

ما

ما - ۲ ما + ما

ما - ما

ما

پہلے ستون میں ما کی تین متصل قیمتیں ہیں۔ دوسرے ستون میں قیمت اور اس کی ماقبل قیمت کے درمیان کے فرق ہیں تیسرے میں دوسرے ستون کے متعلقہ ارقام کے فرق درج ہیں۔ تیسرے اور اس سے اعلیٰ تر فرق بھی حسب ضرورت اسی طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں۔

اگر ہم اختصار کے مد نظر ما - ما = ط اور ما - ۲ ما + ما = ط لکھیں اور لا کی جگہ ت لکھیں کیونکہ وقت (ت) ہیئتیں مسائل میں بالعموم متبوع متغیر ہوتا ہے اور اگر فرق ۱ کو وقت کی اکائی بنائیں تو مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$ما + ت + ط = \frac{ت(ت-۱)}{۲} ط$$

اس آخری مساوات کو ت کے لحاظ سے تفرق کر دو ت کے لحاظ سے ما جس شرح سے بدلتا ہے وہ

$$\frac{فرق}{وقت} = ط - \frac{۱}{۲} ط + ت ط$$

ہے جس سے یہ ظاہر ہے کہ اضافہ کی شرح خود یکساں طور پر بڑھتی ہے۔ وقت کی دو اکائیوں میں تفاعل کی قیمت ما سے ما تک بڑھتی (۱۹) ہے اس لیے اس کے اضافہ کی اوسط شرح فی اکائی وقت $\frac{۱}{۲} ط$ (ما - ما) ہے اور چونکہ یہ شرح یکساں طور پر بڑھتی ہے اس لیے یہ اپنی اوسط قیمت اس وقت اختیار کرے گی جبکہ نصف وقت گزر چکا ہو یعنی جبکہ تفاعل کی

قیمت ما ہو۔ پس ہم حسب ذیل نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔
 کسی آن ت پر تفاعل جس شرح سے فی اکائی وقت بدلتا ہے وہ
 تفاعل کی ان قیمتوں کے فرق کا نصف ہے جو تفاعل کے بعد
 وقت کی ایک اکائی پر اور ت سے قبل وقت کی ایک اکائی پر اختیار
 کرتا ہے۔

بینی اور اج کے عمل کو تیز تر کرنے کے لیے ایفیمس میں اکثر ایک اور
 ستون کا اضافہ کیا جاتا ہے جس سے متناظر لمحہ پر تفاعل کے تغیر کی شرح
 حاصل ہوتی ہے۔ ہم اسے ایک مثال سے واضح کریں گے۔
 فرض کرو کہ چاند کا جنوبی میل بتاریخ ۶ ستمبر ۱۹۰۵ء گرینوچ کی اوسط دوپہر
 ۱۵ گھنٹوں بعد معلوم کرتا ہے۔

۱۵ گھنٹوں گ۔ ۱۔ و (گرینوچ اوسط وقت) پر چاند کا جنوبی میل
 ایفیمس سے ۱۸ ۳۸ ۱۳ حاصل ہوتا ہے اور ۱۰ منٹ میں تغیر ۵۵ ۳۵
 ہے چاند جنوب کی طرف حرکت کر رہا ہے۔ اسی دن ۱۶ گھنٹوں پر جد دل کی
 دوسری سطر سے ۱۸ ۳۸ ۲۲ منٹ میں تغیر حاصل ہوتا ہے اور چونکہ تغیر کی
 شرح یکساں طور پر غلطی ہوئی تصور کی جاسکتی ہے اس لیے دوپہر کے بعد
 (۱۵ + ۱/۴ ت) گھنٹوں پر تغیر فی دس منٹ یہ ہے

۵۵ ۳۵ ۲۳ - ۵۵ ۵۴ ۵۵ ت

تغیر کی اس اوسط شرح کو ۱۵ گھنٹوں اور ۱۵ + ت گھنٹوں کے درمیان
 پورے وقفہ کے لیے مان لیا جاسکتا ہے اور چونکہ ت کو گھنٹوں میں بیان
 کیا گیا ہے اس لیے اس وقفہ میں کل تغیر اوسط شرح کو ۶ ت سے ضرب
 دینے سے حاصل ہوتا ہے۔ پس چاند کا جنوبی میل بتاریخ ۶ ستمبر ۱۹۰۵ء
 ۱۵ + ت گھنٹوں پر حسب ذیل ہے

۱۸ ۳۸ ۱۲ + ۱۳ ۴۱ ۴۱ ت - ۳۲ ۳۲ ت

بینی اور اج کے ضابطے مسئلہ بالا کے معکوس مسئلہ میں وہ وقت
 معلوم کرنے کے لیے بھی استعمال کئے جاتے ہیں جس پر کوئی خاص تفاعل

ان ناموافقی ترین حالات میں بھی ماہ کی قیمت کے اعشاریہ کے آخری مقام میں صرف ایک واحد ہندسہ کی خطا واقع ہو سکتی ہے۔
نیز اسی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$ماہ = ۴ - ماہ - ۶ + ماہ + ۴ - ماہ$$

جس سے بظاہر یہ معلوم ہوتا ہے کہ ماہ، ماہ، ماہ، ماہ معلوم ہونے کے بعد ماہ کو محسوب کیا جاسکتا ہے۔ لیکن یہ وراثی ادراج (Extrapolation) ٹھیک نہیں ہوگا کیونکہ اگر ماہ اور ماہ ہر ایک بقدر نصف ہندسہ کے زیادہ بڑا ہو اور ماہ اور ماہ ہر ایک بقدر نصف ہندسہ کے کم ہو اور ایسا ہونا بہت ممکن ہے تو ماہ کی قیمت کے آخری مقام میں مجموعی خطا، یا ہندسہ تک ہوگی۔

بینی ادراج کا حسب ذیل طریقہ بھی جو بیسل (Bessel) سے منسوب ہے قابل یادداشت ہے۔
فرض کرو کہ ت وہ دلیل ہے جو دو جدولی دلیلوں کے درمیان وسطی نقطہ سے ناپی گئی ہے، جدول کے اس حصہ کو مبادی کی ہر ایک جانب دو جدولی دلیلوں تک لکھ لو۔

فرق اول	فرق دوم	فرق سوم
ماہ		
ماہ - ماہ		
ماہ	ماہ - ۲ + ماہ	
ماہ - ماہ	ماہ - ۳ + ماہ + ۳ - ماہ	
ماہ	ماہ - ۲ + ماہ	
ماہ - ماہ		
ماہ		

$$رکھو \quad 1 = \frac{1}{۲} (ماہ + ماہ) \quad 'ب = ماہ - ماہ'$$

ج = $\frac{1}{4}$ (ماہ - ماہ - ماہ + ماہ) ، د = ماہ - ۳ ماہ + ۳ ماہ - ماہ
 جہاں 'ا' ب 'ج' د وہ مقداریں ہیں جو یا تو مبداء میں سے گزرنے والے
 اتفاقی خط پر واقع ہیں یا اس خط کی مخالف سمتوں پر دو متضادہ مقداروں کے
 درمیان حسابی اوسط ہیں۔
 ہم لکھ سکتے ہیں

$$ما = -\frac{1}{4} ما (ت + \frac{1}{4}) (ت - \frac{1}{4}) (ت - \frac{3}{4})$$

$$+ \frac{1}{4} ما (ت + \frac{3}{4}) (ت - \frac{1}{4}) (ت - \frac{3}{4}) - \frac{1}{4} ما (ت + \frac{3}{4}) (ت + \frac{1}{4}) (ت - \frac{3}{4})$$

$$+ \frac{1}{4} ما (ت + \frac{3}{4}) (ت + \frac{1}{4}) (ت - \frac{1}{4})$$

کیونکہ سرحدات کی بجائے علی الترتیب - $\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ درج کرنے
 سے 'ا' ، 'ب' ، 'ج' ، 'د' حاصل ہوتے ہیں اور ہم یہ مان لیتے ہیں کہ ت کی قریبی
 قیمتوں کے لیے اسی جملہ سے ما کی متناظر قیمتیں حاصل ہوں گی۔
 پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

(۲۲)

$$۴۸ ما = - ما (۸ ت - ۱۲ ت + ۲ ت - ۳)$$

$$+ ۳ ما (۸ ت - ۴ ت + ۱۸ ت - ۹)$$

$$- ۳ ما (۸ ت + ۴ ت - ۱۸ ت - ۹)$$

$$+ ما (۸ ت + ۱۲ ت - ۲ ت - ۳)$$

اور اس لیے

$$۴۸ ما = ما (۸ ت - ۲ ت) (ت + ۳ ب) + (۱۲ ت - ۳) (۲ ج + ۱ د)$$

$$+ (۵۴ ت - ۲۴ ت) ب + (۲۴ ت - ۵۴ ت) د$$

نیٹی اور ارج کا ضابطہ اس اساسی ضابطہ

$$1 = \frac{ت}{۲۰} + \frac{ت (ت - ۲۰)}{۲۰۰} + \frac{ت (ت - ۲۰)^2}{۲۰۰۰}$$

میں تحویل ہوگا اگر وقت کو ت سے محسوب جائے۔

مثال ۶۔ ایفیمرس سے حسب ذیل اندراجات لئے گئے ہیں:-

گر نیوچ اوسط دوپہر

سورج کا شمالی میل ۱۹۰۵

۲۹۶۹ ۲۰ ۶ ۷ اپریل

۲۲۶۴ ۳ ۷ ۸

۲۷۶۷ ۲۵ ۷ ۹

ثابت کرو کہ سورج کا میل بتاریخ ۷ اپریل ۱۹۰۵ بوقت ۶ ب۔ ظ (بعد ظہر) ۲۷۶۷ ۲۵ ۷ ہے۔

مثال ۷۔ چاند کا نیم قطر حسب ذیل ہے:-

گر نیوچ اوسط دوپہر

چاند کا نیم قطر ۱۹۰۹

۶۹۶۴۴ ۱۶ ۳ ستمبر

۱۸۶۶۱ ۱۶ ۴

۵۶۹۷ ۱۶ ۵

۵۲۶۶۹ ۱۵ ۶

ثابت کرو کہ چاند کا نیم قطر بتاریخ ۳ ستمبر ۱۹۰۹ بوقت نیم شب ۶۹۶۴۴ ۱۶ ۳ ہے۔

(۲۲)

۷ ب۔ ظ معادل ہے p.m. کا۔

ثابت کرو کہ پانچ کا ص - م بتاریخ ۲۱ دسمبر ۱۹۰۵ء بوقت (۱۸ + ۱۲) لگنے
یہ تھا

$$۱۴ گ ۲۱ م ۳۵۶۰۹ + (۲۸ م ۶۶۱۰ ش) لا$$

$$+ ۳۵۸۶ ش (۱ - لا ۲) (۱ + لا ۲)$$

$$\text{—————} \frac{۳}{۲} (۱ + لا ۲) \frac{۳}{۲} \text{—————}$$

دوسرا باب

کرؤی محدودوں کا استعمال

(۲۵)

صفحہ

صفحہ

۳۸

۶۔ کرؤ پر درجہ دار بڑے دائرے۔

۴۰

۷۔ کرؤ پر کے کسی نقطہ کے محدود۔

۸۔ دو نقطوں کو ملانے والی قوس کی جیب التمام کو ان نقطوں کے

۴۲

محدودوں میں بیان کرنا۔

۴۶

۹۔ کرؤی محدودوں میں دی ہوئی مساوات کا مفہوم۔

۱۰۔ دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان ان کے شیطوں کو ملانے والی

۴۹

اس قوس کے مساوی ہوتا ہے جو ۸۰ سے بڑی نہ ہو۔

۵۱

۱۱۔ دو درجہ دار بڑے دائروں کا تقاطع۔

۵۵

۱۲۔ محدودوں کا استعمال۔

۶۳

۱۳۔ کوکارتوں کا استعمال۔

۶۔ کرؤ پر درجہ دار بڑے دائرے۔

کسی بڑے دائرہ کے محیط کو تقسیم کرنے والے نشانوں کے ذریعہ ۳۶۰ مساوی حصوں میں منقسم فرض کیا جاتا ہے۔ ان میں سے ایک نشان سے ابتدا کر کے جسے صفر لیتے ہیں باقاعدہ ترتیب میں آنے والے متواتر نشانوں

۱، ۲، ۳،، ۳۵۹ کہلاتے ہیں۔ اس کے بعد کا نشان صفر ہے، پس یہ نقطہ صفر یا ۳۶۰ کہلاتا ہے۔ اس طرح ایک درجہ دار بڑا دائرہ چل ہوتا ہے، اس میں ہر درجہ کے وقفہ کو حسب ضرورت فریقہوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

صفر سے ابتدا کرنے میں اعداد کسی ایک سمت میں بڑھ سکتے ہیں اور اس طرح ایک ہی دائرہ کی درجہ بندی ایک ہی صفر نشان سے دو بائیں جداگانہ طریقوں سے عمل میں آسکتی ہے۔

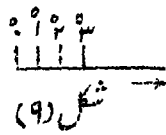
فرض کرو کہ ایک شخص کرہ کے بیرونی جانب ایک درجہ دار بڑے دائرہ پر اس سمت میں چلتا ہے جس میں اعداد بڑھتے ہیں یعنی صفر درجہ سے ایک درجہ کی سمت میں نہ کہ صفر سے ۳۵۹ کی سمت میں۔ تب اس شخص کے بائیں ہاتھ کی طرف بڑے دائرہ کا وہ قطب ہوگا جسے ہم لفظ شطب (Nole) سے موسوم کر سکتے ہیں اور دائیں ہاتھ کی طرف وہ قطب ہوگا جسے ہم لفظ ضد شطب

(Antinole) سے موسوم کر سکتے ہیں۔ اس طرح اگر ہم ارضی خط استوا کو ایک درجہ دار بڑے دائرے کے طور پر تصور کریں جس کی تقسیم گریزوں یا پیرس سے مشرقی جانب طول بلدوں کے لیے عمل میں آئی ہو تو زمین کا شمالی قطب اس درجہ دار بڑے دائرہ کا شطب ہے اور زمین کا جنوبی قطب دائرہ کا ضد شطب ہے۔ برخلاف اس کے اگر خط استوا کی درجہ بندی اس طرح عمل میں آئی کہ اس پر مغربی جانب چلنے سے طول بلد بڑھتے تو ایسے دائرہ کا شطب زمین کا جنوبی قطب ہوتا اور اس کا ضد شطب زمین کا شمالی قطب۔

جب کرہ پر کسی نقطہ کو ایک درجہ دار بڑے دائرہ کے شطب کے طور پر بیان کیا جاتا ہے تو اس سے نہ صرف اس بڑے دائرہ کا محل متعین ہوتا ہے بلکہ اس پر کی وہ سمت بھی جس میں درجہ بندی عمل میں آئی ہے۔ اگر دائرے ہوئے نقطہ کو اس درجہ دار بڑے دائرہ کے ضد شطب کے طور پر ظاہر کیا جاتا تو درجہ بندی کی سمت الٹ جاتی کیونکہ تعریف کی رو سے ضد شطب

اُس شخص کے دائیں ہاتھ کی جانب ہوتا ہے جو اس بڑے دائرہ پر بڑھتے درجوں کی سمت میں چلتا ہے۔

کسی درجہ دائرہ بڑے دائرہ پر صفر سے ا کی سمت ظاہر کرنے کے لیے



دائرہ پر ایک تیر کا نشان دیدینا کافی ہے جیسا کہ شکل ۹ اور شکل

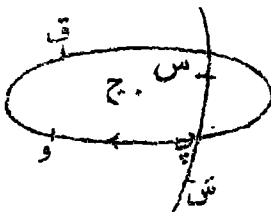
۱۰ میں دکھایا گیا ہے۔ بڑھتے

درجوں کی سمت کو مثبت سمت

کہنا اور گھٹتے درجوں کی سمت کو منفی سمت کہنا سہولت بخش ہوگا۔

۷۔ کرہ پر کے کسی نقطہ کے محدود

کسی بڑے دائرہ کو جس کی درجہ بندی مبداء و پر : سے ہوئی ہو خواہ کرہ بڑا دائرہ منتخب کرو۔ تب ہم کرہ پر کے کسی نقطہ کے محل کو دو محدودوں سے اور ضہ کی مدد سے جو اس بڑے دائرہ کے خارج سے لگے ہوں بیان کر سکتے ہیں۔



اگر ضہ اور ضہ کو خاص

قیمتیں دی گئی ہوں تو کرہ پر کا متناظر

نقطہ اس حسب ذیل طریقہ سے

معلوم کیا جاتا ہے۔ مبداء و سے

بڑھتے درجوں کی سمت میں بڑے

دائرہ پر نقطہ پ ایسا لو کہ

و پ = ضہ۔ نقطہ پ پر ایک بڑا دائرہ کھینچو جو و پ پر عمود ہو۔

اب اس دائرہ پر ایک قوس لینی ہے جو ضہ کے مساوی ہو۔ اگر ضہ

مثبت ہو تو مطلوبہ نقطہ اس کو اس نیم کرہ میں لینا چاہیے جس میں شطب

واقع ہے۔ لیکن اگر ضہ منفی ہو تو مطلوبہ نقطہ اس کو اس نیم کرہ میں

لینا چاہیے جس میں ضد شطب واقع ہے۔ پس جب 'ضہ' اور ضہ

دئے جاتے ہیں تو کرہ پر نقطہ کا محل ٹھیک طور پر معلوم ہو جاتا ہے۔ بالعموم

سہولت اس میں ہے کہ اُس نیم کرہ کو جس میں شطب واقع ہوتا ہے مثبت نیم کرہ کہا جائے اور دوسرے کو جس میں ضد شطب واقع ہوتا ہے منفی نیم کرہ کہا جائے۔
عہ کی انہی قیمتوں پر غور کرنے کی ضرورت نہیں کیونکہ اگر نقطہ ق کو -۹۰ کے طور پر بیان کیا گیا ہو جبکہ زاویہ ۳۰ ج ق $= ۹۰$ تو اس نقطہ ق کو $+۲۰$ سے ظاہر کرنے میں بالعموم زیادہ سہولت ہوگی کجہاں ایسے مثبت سمت میں ناپا گیا ہے۔ پس ہم یہ قرار داد اختیار کرتے ہیں کہ عہ کی تمام قیمتیں $+۳۶۰$ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

نیز ضدہ کی قیمتوں کو -۹۰ اور $+۹۰$ کے درمیان مفید کرنا سہولت بخش ہے کیونکہ اس سے کچھ اہم رُفح ہوتا ہے اور کابل عمومیت بھی برقرار رہتی ہے۔
بلاشبہ دو محدود ہمیشہ ایک نقطہ کی تعین کریں گے لیکن ضدہ کی اس قید کے بغیر نتیجہ نہیں نکلے گا کہ ایک نقطہ کے محدود محدودوں کا صرف ایک واحد ممکن زوج ہیں۔ مثلاً عہ $= ۳۰$ ضدہ $= ۲۰$ سے وہ نقطہ ظاہر ہوگا جو نقطہ عہ $= ۲۱۰$ ضدہ $= ۱۶۰$ سے مختلف نہیں ہوگا لیکن اگر ہم یہ قرار دے لیں کہ ضدہ حدود -۹۰ اور $+۹۰$ کے باہر واقع نہیں ہوتا تو اس سے نہ صرف یہ لازم آئے گا کہ محدودوں کے ایک زوج سے ایک نقطہ متعین ہوتا ہے بلکہ یہ بھی کہ ایک نقطہ بالعموم محدودوں کا صرف ایک زوج رکھتا ہے۔ عرف مستثنیٰ صورتیں اساسی دائرہ کے شطب اور قید شطب میں کیونکہ شطب میں ضدہ $= ۹۰$ اور ضد شطب میں ضدہ $= -۹۰$ اور ہر صورت میں عہ غیر متعین ہے۔

مثال ۱۔ ان قیود کو ترک کر کے کہ عہ ۳۶۰ اور -۹۰ ضدہ ۹۰ ثابت کر دے کہ نقطہ عہ $= ۳۰$ ضدہ $= ۳۰$ کو حسب ذیل محدودوں میں سے کسی ایک سے بھی برابر تعبیر کیا جاسکتا ہے:

$$(+۲۲۰, +۱۵۰), (-۳۲۰, -۲۰), (+۱۲۰, +۱۵۰), (-۲۰, -۳۰), (+۵۸۰, +۱۵۰), (-۳۹۰, -۲۰), (+۹۸۰, +۳۰)$$

ہم نقطہ کے محال کو بدلے بغیر اس کے محدودوں میں سے کسی ایک یا دونوں میں ± ۳۶۰ ہمیشہ جمع کر سکتے ہیں۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ محدود کے حسب ذیل جوڑے

$$\begin{aligned} & \text{عہ} + \text{ضہ} = \text{عہ} + \text{ضہ} \\ & ۳۶۰ + \text{عہ} = ۳۶۰ + \text{ضہ} \\ & ۱۸۰ + \text{عہ} = ۱۸۰ + \text{ضہ} \\ & ۱۸۰ + \text{عہ} = ۱۸۰ - \text{ضہ} \end{aligned}$$

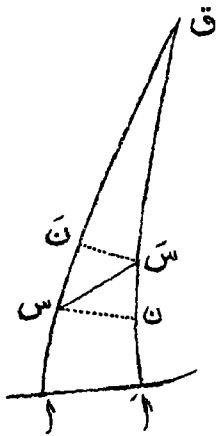
سب کے حسب ایک ہی نقطہ کو ظاہر کرتے ہیں اور اس لئے اس امر کی تصدیق کرو کہ کرہ پر کے ہر نقطہ کے لیے محدودوں کا ایک جوڑا ایسا معلوم کیا جاسکتا ہے کہ

$$۳۶۰ + \text{عہ} = ۳۶۰ - \text{ضہ} \text{ اور } ۱۸۰ + \text{عہ} = ۱۸۰ - \text{ضہ}$$

۸۔ دو نقطوں کو ملانے والی قوس کی جیب التمام کو ان نقطوں کے محدودوں میں بیان کرنا۔ (۲۸)

فرض کرو کہ \angle ا حوالے کا

بڑا دائرہ ہے اور $ق$ اس کا شطیب ہے۔ فرض کرو کہ دئے ہوئے نقطے $س$ اور $س$ ہیں۔ چونکہ $اس = ضہ$ ، اس لیے $س ق = ۹۰ - ضہ$ اور اسی طرح $س ق = ۹۰ - ضہ$ ۔ نیز $ا = عہ$ اور چونکہ $ق ا$ اور $ق ا$ میں سے ہر ایک ۹۰ ہے اس لیے



شکل (۱۱)

زاویہ $س ق س = عہ$

اب مثلث $س ق س$ پر اساسی ضابطہ (۱) لگانے سے

$$\text{جم طہ} = \text{جب ضہ جب ضہ} + \text{جم ضہ جم ضہ} (عہ - عہ) \dots (ا)$$

جہاں طہ = سس -

اگر نقطے سس اور سس کرہ پر باہم نزدیک ہوں تو ان کے فاصلہ کی تعین کے لیے ایک زیادہ آسان ضابطہ اس طرح حاصل کیا جاتا ہے :-
 جم طہ = جب ضہ جب ضہ + جم ضہ جم ضہ (عہ - عہ)

$$= \text{جب ضہ جب ضہ} \left\{ \text{جم} \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{عہ}) + \text{جب} \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{عہ}) \right\}$$

$$+ \text{جم ضہ جم ضہ} \left\{ \text{جم} \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{عہ}) - \text{جب} \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{عہ}) \right\}$$

$$= \text{جم (ضہ - ضہ)} \left\{ \text{جم} \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{عہ}) - \text{جم (ضہ + ضہ)} \text{جب} \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{عہ}) \right\}$$

اس کو

$$\text{سس} = \text{جم} \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{عہ}) + \text{جب} \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{عہ})$$

میں سے تفریق کر دو تو

$$\text{جب} \frac{1}{4} \text{طہ} = \text{جم} \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{عہ}) - \text{جب} \frac{1}{4} (\text{ضہ - ضہ}) + \text{جب} \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{عہ}) \left\{ \text{جم} \frac{1}{4} (\text{ضہ + ضہ}) \right\}$$

یہ بلاتشبہ عام طور پر درست ہے اور اگر طہ بہت چھوٹا ہو تو اس سے تقریبی حل

$$\text{طہ} = (\text{ضہ - ضہ}) + (\text{عہ} - \text{عہ}) \left\{ \text{جم} \frac{1}{4} (\text{ضہ + ضہ}) \right\}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم اس ضابطہ کو ہندسی طور پر اس طرح ثابت کر سکتے ہیں (شکل ۱۱) :-
 فرض کرو کہ سس ن اور سس ن علی الترتیب سس ق اور
 سس ق پر عمود ہیں۔ چونکہ سس ن سس ایک بہت چھوٹا مثلث ہے ایسے
 سس ن + ن سس = سس سس

پس تقریباً

$$(\text{ضہ - ضہ}) + (\text{عہ} - \text{عہ}) \left\{ \text{جم} \frac{1}{4} \text{ضہ} \right\} = \text{سس سس}$$

اسی طرح مثلث سس ن سس سے

(ضہ - نہ) (بہ - عہ) (جم - ضہ) = مس مس
 مس مس کی ان دو تقریبی قیمتوں میں صرف یہ فرق ہے کہ ایک میں جم ضہ
 آتا ہے اور دوسرے میں جم ضہ - عام طور پر ایک جیب التمام بہت بڑی
 اور دوسری بہت چھوٹی ہوتی ہے اور ایس لیے تقرب کے لیے جم ضہ
 اور جم ضہ کی بجائے ہم ان کا اوسط لکھ سکتے ہیں جو اس طرح معلوم کیا جاتا ہے

$$\frac{1}{4} (\text{جم ضہ} + \text{جم نہ}) = \text{جم} \frac{1}{4} (\text{ضہ} + \text{نہ}) \frac{1}{4} (\text{ضہ} - \text{نہ})$$

$$= \text{جم} \frac{1}{4} (\text{ضہ} + \text{نہ})$$

اور اس کے اندراج سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

قائم محدود۔ فرض کرو کہ نیم قطر کے کرہ پر ایک نقطہ عہ ضہ

ہے۔ ہم (ا) سے نقطہ (عہ ضہ) کے قائم محدود ان محوروں کے حوالے سے
 معلوم کر سکتے ہیں جن کی تعریف حسب ذیل ہے:-

$$+ \text{لا کرہ کے مرکز سے نقطہ عہ} = \text{ضہ} = \text{تک ہے}$$

$$+ \text{ما} \quad \quad \quad \text{عہ} = \text{ضہ} = \text{تک ہے}$$

+ ی ہم (ا) میں اندراج کرنے سے دیکھتے ہیں کہ ان قوسوں کی جہتیں
 جوق سے ان تین مثبت محوروں کے بیروں تک پہنچتی ہیں علی الترتیب
 یہ ہیں

جم عہ جم ضہ جب عہ جم ضہ جب ضہ

اور اس لیے قائم محدود

$$= \text{لا} = \text{رجع عہ جم ضہ} = \text{ما} = \text{رجع عہ جم ضہ} = \text{ی} = \text{رجع ضہ}$$

مثال ۱۔ مس اور مس کے درمیان فاصلہ طہ معلوم کرو جبکہ یہ دیالیا

$$\text{ہو کہ ضہ} = ۱۲^\circ ۲۴' ۲۵'' \text{ ضہ} = ۲۴^\circ ۱۵' ۴۰'' \text{ عہ} = ۲۴^\circ ۳۸' ۴۱''$$

ہم فاصلہ طہ کو راست ضابطہ (ا) سے معلوم کرتے ہیں

$$\begin{array}{r}
 \text{جب ضہ } 95613431 \text{ جم ضہ } 95959822 \\
 \text{جب ضہ } 95332327 \text{ جم ضہ } 95989428 \\
 \text{جم (عہ - عم) } 95864423 \text{ —————} \\
 \text{—————} \quad 86924-45 \\
 95816195
 \end{array}$$

پس

$$\begin{array}{r}
 \text{پہلی رقم } 5-88321 \\
 \text{دوسری رقم } 5652930 \text{ —————}
 \end{array}$$

$$\text{جم ط } 5623251$$

$$\text{طہ } = 24^{\circ} 59' 21''$$

$$\begin{array}{l}
 \text{مثال ۲۔ اگر ضہ } = 24^{\circ} 59' 21'' \text{ ، ضہ } = 32^{\circ} 14' 21'' \text{ اور عہ عم} \\
 = 29^{\circ} 11' 33'' \text{ تو بتاؤ کہ طہ } = 25^{\circ} 26' 46''
 \end{array}$$

مثال ۳۔ دو ستاروں کے محدود علی الترتیب عم، ضہ اور عم، ضہ میں۔ (آ) سے ثابت کرو کہ ان کو ملانے والے بڑے دائرے کے قطبوں کے محدود (عہ، ضہ) مساواتوں

$$\text{مس ضہ} = \text{عم ضہ، جم (عہ - عم)} = \text{عم ضہ، جم (عہ - عم)}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ ان مساواتوں کو ہندسی طور پر بھی حاصل کرو۔

مثال ۴۔ سمجھاؤ کہ مثال ۳ کے حل کا اطلاق کس طرح دونوں قطبوں (۳۰) پر ہوتا ہے اور بتاؤ کہ شطب کو ضہ شطب سے کس طرح مینر کیا جاسکتا ہے

اگر مثبت سمت پہلے ستارے سے دوسرے ستارے کی سمت ہو۔

مثال ۵۔ اگر لی، ایک بڑے دائرے کی اس قوس کا طول ہو جو زمین پر (جسے نصف قطر کا ایک کرہ فرض کیا گیا ہے) عرض بلد لم، طول بلد ل سے عرض بلد لم، طول بلد لم تک لی گئی ہو تو ثابت کرو کہ لی = سراجم (جب لم جب لم قطافہ)

جہاں
 نیز ثابت کرو کہ یہ بڑا دائرہ جس بلند ترین عرض بلند تک پہنچتا وہ
 جم^۱ (جم لہ جم لہ جب (ل لہ ل) قم (ل لہ ل)

ہوگا۔

فرض کرو کہ یہ دو نقطے س^۱
 س^۱ ہیں (شکل ۱۲) اور خط اتوار

و پ پ پ ہے اور شمالی
 قطب ن ہے۔ تب

جم س^۱ س^۱ = جب لہ جب لہ

+ جم لہ جم لہ جم (ل لہ ل) (ل لہ ل)

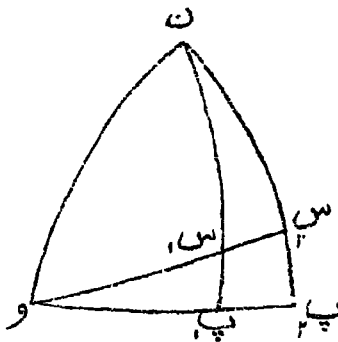
اس مثال کے دوسرے

جزو کو ثابت کرتے ہیں کہ

س^۱ س^۱ (محدودہ بشرط ضرورت)

پر بلند ترین عرض بلند زاویہ س^۱ و پ پ

کے مساوی ہے۔



شکل (۱۲)

اب ثابت ن و س سے

جم س^۱ و پ پ = جب ن و س^۱ = جب ن س^۱ جب ن س^۱ و

= جب ن س^۱ جب ن س^۱ جب ن س^۱ جب ن س^۱ قم س^۱ س^۱

مثال ۶۔ اس امر کی تصدیق کرو کہ نقطہ (عہ، ضہ) اور نقطہ (عہ، ضہ)

کے درمیان جو فاصلہ ہے اس کے جملہ میں اگر عہ، ضہ کی بجائے علی الترتیب

۱۸۰° + عہ، ضہ رکھا جائے تو اس میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی اور

سمجھاؤ کہ ایسا ہونا کیوں ضروری ہے۔

۹۔ کروی محدودوں میں دی ہوئی مساوات کا مفہوم۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر عہ اور ضہ دے گئے ہوں تو ایک نقطہ جسکے محدود یہ مقداریں ہوں کرہ پر پوری طرح متعین ہو جاتا ہے۔ اگر ہمیں عہ اور ضہ کے متعلق سوائے اس کے کچھ معلوم نہ ہو کہ وہ ایک مساوات کو پورا کرتے ہیں جس میں وہ دوسری مقداروں کے ساتھ جو معلومہ فرض کی جاتی ہیں داخل ہوتے ہیں تو ایسی صورت میں ان دو چھوٹے مقداروں کو متعین کرنے کے لیے کافی مفروضات موجود نہیں ہوتے۔

عہ کی کوئی قیمت اس مساوات میں مندرج کی جائے تو ضہ میں ایک مساوات حاصل ہوگی جس کی بالعموم ایک یا زیادہ اصلیں معلوم ہو سکیں گی۔ عہ کی مختلف متعدد قیمتیں لیکر اس عمل کو دہرانے سے محدودوں عہ، ضہ کے جوڑوں کا ایک ختم نہ ہونے والا سلسلہ حاصل ہوگا۔ ان میں سے ہر جوڑے سے کرہ پر ایک نقطہ متعین ہوگا۔ اگر ان میں سے متعدد نقطوں کو کرہ پر منقسم کیا جائے تو ان سے ایک منحنی ظاہر ہوگا جس کو کردی سطح پر منقسم کیا جاسکے گا۔ اب ابتدائی مساوات کو اس منحنی کی مساوات کے طور پر ٹھیک اسی طرح (۳۱) تصور کیا جاسکتا ہے جس طرح لا اور ما میں کوئی مساوات علم ہندسہ تحلیلی میں مستوی منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔

ہم اول یہ بتائیں گے کہ اگر نقطہ عہ، ضہ کے محدود مساوات

(جب ضہ + جب جب عہ جم ضہ + ج جم عہ جم ضہ =)

کو پورا کریں جہاں 'ب'، 'ج' مستقل ہیں تو اس نقطہ کا طریق ایک بڑا دائرہ ہے جس کے قطبوں کے محدود عہ، ضہ اور ۸۰ + عہ، ضہ ہیں جہاں

$$\text{مس عہ} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}, \text{ جب ضہ} = \frac{\text{ا}}{\text{ج} + \text{ب} + \text{ج}}$$

ہم { کو مثبت لے سکتے ہیں کیونکہ اگر ضرورت پڑے تو تمام رقموں کی علامتیں بدلی جاسکتی ہیں۔ تین نئی مقداریں ھ، عہ، ضہ ایسی لو کہ

۱ = $\text{ھ جب ضہ} + \text{ب} = \text{ھ جب عہ جم ضہ} + \text{ج} = \text{ھ جم عہ جم ضہ}$
 تو مربع لینے اور جمع کرنے سے $\text{ھ} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د}$ - اس
 جذ المربع کی علامت مثبت لی جائے تو ہمیں پہلی مساوات سے حاصل ہوتا
 ہے جب ضہ = مثبت مقدار جو ا ، اس لیے ضہ مثبت ہے اور
 چونکہ ضہ ا ، اس لیے ضہ اور ا ۔ ضہ کے درمیان کوئی ایہام
 نہیں ہے۔ دوسری اور تیسری مساواتوں سے جم عہ اور جب عہ
 ملتے ہیں اور اس لیے عہ بغیر کسی ایہام کے معلوم ہوتا ہے اور اس طرح
 ہمیں ایک حل عہ، ضہ حاصل ہوتا ہے۔ لیکن اگر ہم نے ھ کی منفی
 قیمت لی ہوئی تو پہلی مساوات سے ضہ کی بجائے - ضہ ملے گا اور آخری دو مساواتوں
 عہ کی بجائے صرف ا + ا عہ رکھنے سے پوری ہو سکتی ہیں۔ اس لیے دو حل
 عہ، ضہ اور ا + ا عہ - ضہ ہیں اور یہ نقطے متقاطع نقطے ہیں۔ اب تبدیلی
 مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{ھ} \{ \text{جب ضہ جب ضہ} + \text{جم ضہ جم ضہ} + \text{جم} \} = \text{ا}$$

اس لیے نقطہ عہ، ضہ ثابت نقطہ عہ، ضہ سے ا پر ہونا چاہئے اور
 اس لیے نقطہ عہ، ضہ کا طریق ایک بڑا دائرہ ہے۔
 مثال ۱۔ اگر مساوات

$\text{ا} = \text{ب} + \text{ج} + \text{د}$ جب عہ جم ضہ + ج جم عہ جم ضہ = د
 پوری ہو تو نقطہ عہ، ضہ کا طریق بالعموم ایک چھوٹا دائرہ ہو گا جس کا نصف قطر

$$\text{جم} \{ \text{د} \} \{ \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} \} = \text{د}$$

ہو گا نیز ثابت کرو کہ اگر $\text{د} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج}$ تو مساوات بالا صرف ایک
 نقطہ کو تعبیر کرتی ہے۔
 مثال ۲۔ اگر کروی پر ایک نقطہ کے رواں محدود عہ، ضہ ہوں اور

۱۔ ب مستقل ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

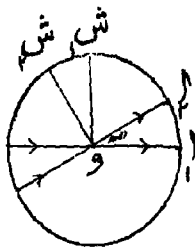
مس ضہ = مس ب جب (ع۔ د)

ایک بڑے دائرہ کو تعبیر کرتی ہے جس کا ایک قطب نقطہ ع = د + ۲۰۰ ضہ = ۹۰۔ ب ہے۔

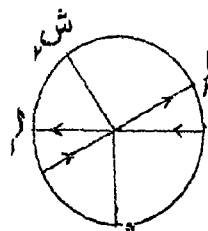
۱۰۔ دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان ان کے شیطوں (۳۲) کو ملانے والی اس قوس کے مساوی ہوتا ہے جو ۱۸۰ سے بڑی نہ ہو۔

دو غیر درجہ دار بڑے دائروں کا میلان بالعموم ناگزیر طور پر مبہم ہوتا ہے کیونکہ یہ میلان دو تکمیلی زاویوں میں سے کوئی ایک ہو سکتا ہے اور یہ ابہام صرف اس صورت میں رفع ہوتا ہے جبکہ یہ دائرے ایک دوسرے کو علی التّوا تم قطع کریں۔

لیکن دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان ضرور نہیں کہ مبہم ہو کیونکہ ہم دو تکمیلی زاویوں میں سے ہمیشہ اس زاویہ کو معلوم کر سکتے ہیں جسے ان دو دائروں کا میلان خیال کیا جاتا ہے۔ دو بڑے دائروں کے میلان کی یہ تعریف ہے کہ



شکل (۱۳)



شکل (۱۲)

یہ وہ زاویہ ہے جو ان دائروں کے ان حصوں کے درمیان ہوتا ہے

جن میں تیر (۷) نقطہ تقاطع سے نکلتے ہیں یا نقطہ تقاطع کی طرف آتے ہیں۔
 شکل ۱۲ میں دائروں کے دو قطعات جو د سے نکلتے ہیں و ل اور
 و ل ہیں اور اس لیے زاویہ ل و ل (۷۰) لینا ہو گا لیکن اگر ہم صرف
 و ل پر تیر کی سمت بدل دیں اور شکل میں کوئی اور تبدیلی نہ کریں تو ہمیں وہ
 نتیجہ حاصل ہوتا ہے جسکو شکل (۱۳) میں دکھایا گیا ہے جس میں اب د سے نکلتے
 والے قطعات و ل اور و ل کا درمیانی زاویہ ل و ل (۸۰) ہے۔
 اور اس کو اس صورت میں ل و ل دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان لینا ہو گا۔
 اگر ل و ل ش ش (شکل ۱۳) وہ بڑا دائرہ ہو جو و ل اور و ل
 دونوں پر غمودے تو چونکہ ل و ل = ۹۰ اور و ل = ۹۰ اس لیے ل و ل = ۹۰۔
 اگر و ل اور و ل کے شطب علی الترتیب ش ش اور ش ش ہوں تو ل و ل
 = ۹۰ اور ل و ل = ۹۰ اور اس لیے

ش ش = ل و ل = ۹۰
 اسی طرح شکل ۱۴ میں و ل کا شطب ش ش اب پھلی صورت کا
 ضد شطب ہے۔ چونکہ ل و ل و ش = ۹۰ اس لیے ل و ش = ۹۰۔
 اور چونکہ ل و ش = ۹۰ اس لیے ش و ش = ۹۰۔
 (۳۳) حسب تشریح بالا اس صورت میں دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان ہے
 پس ہمیں یہ اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ دو درجہ دار بڑے دائروں کے
 درمیان میلان ہمیشہ اس قوس سے ناپا جاتا ہے جو ان کے شطبوں کو
 ملاتی ہے۔

بلاشبہ قوس ش ش (شکل ۱۳) کے متعلق ایک سوال پیدا
 ہو سکتا ہے۔ آیا یہ وہ چھوٹی قوس ہے جو ہمیں فطری طور پر لینی چاہئے یا
 وہ بڑی قوس جو دائرہ پر دو سرے طریقہ سے ش ش سے ل و ل پر سے
 ہوتے ہوئے ش ش تک پہنچنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اس طرح دو
 قوسیں ہیں جو باہم ملکر ۳۶۰ بناتی ہیں اور ان میں سے کوئی قوس ایک لحاظ
 سے میلان متصور ہو سکتی ہے۔ لیکن ہم کسی ابہام کو جو اس طرح پیدا

ہوتا ہے اس قرارداد سے رفع کر سکے ہیں کہ دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان کبھی بھی ۸۰° سے متجاوز نہ ہونا چاہئے۔

مثال ۱۔ اگر تین درجہ دار بڑے دائروں پر ب ج ج (ب ج) (ب ج) مثبت سمتیں ہوں اور ان سے مثلث (ب ج ج) بنے اور اگر ان کے شطب علی الترتیب (ب ج ج) ہوں تو ثابت کرو کہ
(۱) اگر قطبی مثلث (ب ج ج) کے ضلعوں پر ب ج ج (ب ج ج) مثبت سمتیں ہوں تو ان ضلعوں کے شطب علی الترتیب (ب ج ج) ہیں۔

(ب ج ج) مثلث (ب ج ج) کے ضلع اور زاویے مثلث (ب ج ج) کے زاویوں اور ضلعوں کے علی الترتیب مکمل ہیں۔

مثال ۲۔ دو درجہ دار دائروں کے شطب عم ۱، ضم ۱ اور عم ۲، ضم ۲ ہیں۔ اگر ان دائروں کا میلان صہ ہو تو ثابت کرو کہ

جم صہ = جب ضم جب ضم ۲ + جم ضم ۱ جم ضم ۱ (عم ۱ - عم ۲)
اور اگر ان دو دائروں کے نقطہ تقاطع کے محدود عم ۱، ضم ۱ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ضم} = \pm \text{جم ضم ۱ جم ضم ۲ جب (عم ۲ - عم ۱)}$$

جب صہ

$$\text{جم ضم جم عم} = \pm \text{جم ضم جب ضم جب عم - جب ضم جم ضم جب عم}$$

جب صہ

$$\text{جم ضم جب عم} = \pm \text{جب ضم ۱ جم ضم ۲ جب ضم ۱ جم عم ۱}$$

جب صہ

جہاں اوپر کی اور نیچے کی علامتیں بالترتیب دو تقاطعوں کے متناظر ہیں۔

۱۱۔ دو درجہ دار بڑے دائروں کا تقاطع۔

فرض کرو کہ ج اور ج (شکل ۱۵) دو درجہ دار بڑے دائرے ہیں جو دو متقاطر نقطوں ط اور ط پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ج کاشطب ش ہے اور ج کاشطب ش -
 کوئی نقطہ جو ج پر مثبت سمت میں حرکت کرتا ہے نقطہ ط پر
 آکر اس مثبت نیم کرہ کے اندر داخل ہوتا ہے جو ج سے محدود ہے -
 اس لیے ہم کہتے ہیں کہ ط 'ج کے لحاظ سے ج کا صعودی عقدہ ہے -
 کوئی نقطہ جو ج پر مثبت سمت میں حرکت کرتا ہے ط پر آکر اس منفی
 نیم کرہ میں داخل ہوتا ہے جو ج سے محدود ہے - اس لیے ہم کہتے ہیں کہ
 ط 'ج کے لحاظ سے ج کا نزولی عقدہ ہے -

(۳۴)

اگر ج پر و مبداء ہو جہاں سے محدودوں کی پیمائش ہوئی ہے اور
 اگر و پ = ع، پ ش = ضہ تو ج کے لحاظ سے ش کے محدود
 جو ج کاشطب ہے عم اور ضہ ہیں -

اب چونکہ دفعہ ۱۰ کی رو سے دو درجہ دار بڑے دائروں کا درمیانی
 زاویہ ان کے شیطوں کی درمیانی قوس ہوتی ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج اور ج
 کا درمیانی زاویہ یا میلان ۹۰ - ضہ ہے - پس

$$\text{وط} = \text{و پ} + \text{پ ط} = \text{ع} + ۹۰$$

$$\text{وط} = \text{و ط} + ۱۸۰ = \text{ع} + ۲۷۰$$

اور اس لیے حسب ذیل عام بیان حاصل ہوتا ہے -
 اگر ایک درجہ دار بڑے دائرہ ج کے شطب کے محدود 'بلحاظ دوسرے
 بڑے دائرہ ج کے 'ع، ضہ ہوں تو

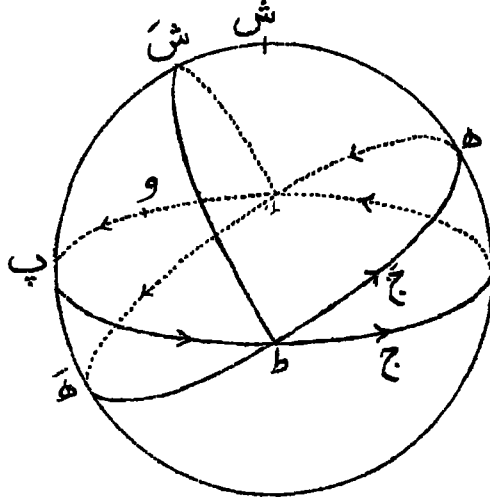
ان دائروں کا میلان ۹۰ - ضہ ہے

ج پر ج کے صعودی عقدہ کے محدود ۹۰ + ع، ۱۸۰ + ع

اور ج پر ج کے نزولی عقدہ کے محدود ۲۷۰ + ع، ۰ ہیں -

اگر ج پر ج کے صعودی عقدہ کے محدود (قہ ۰) لیے جائیں جس سے
 اکثر سہولت پیدا ہوتی ہے اور اگر صہ کو ان دائروں کا میلان قرار
 دیا جائے تو ج کے شطب کے محدود (قہ ۲۷۰ + ۹۰ - صہ) حاصل

ہو گئے ہیں جبکہ ج حوالہ کا دائرہ ہو۔



شکل (۱۵)

(۳۵) عام طور پر ایک بڑے دائرہ کے لحاظ سے دوسرے بڑے دائرہ کا محل اور اس کی درجہ بندی کی سمت مقرر کرنے کے لیے اس دوسرے دائرہ کے تین مبدل بلحاظ پہلے دائرہ کے معلوم ہونے چاہئیں۔ مثلاً دوسرے بڑے دائرے کے شطب کے دو محدودے جاسکتے ہیں کیونکہ اس سے شطب کا محل متعین ہوتا ہے اور پھر نہ صرف وہ بڑا دائرہ متعین ہوتا ہے جس کا قطب یہ شطب ہے بلکہ وہ سمت بھی معلوم ہوتی ہے جس میں دوسرے بڑے دائرہ کی درجہ بندی ہوئی ہے۔ اگر ہمیں صرف اس بڑے دائرہ کے ایک قطب کے محدودے جاتے تو بلاشبہ بڑے دائرہ کا محل متعین ہو جاتا لیکن جب تک یہ معلوم نہ ہو کہ دیا ہوا قطب شطب ہے یا ضد شطب اس وقت تک درجہ بندی کی سمت معلوم نہیں کی جاسکتی۔ تیسرا مبدل اس دوسرے بڑے دائرہ پر درجہ بندی کے مبدل کو مقرر کرنے کے لیے مطلوب ہوتا ہے۔

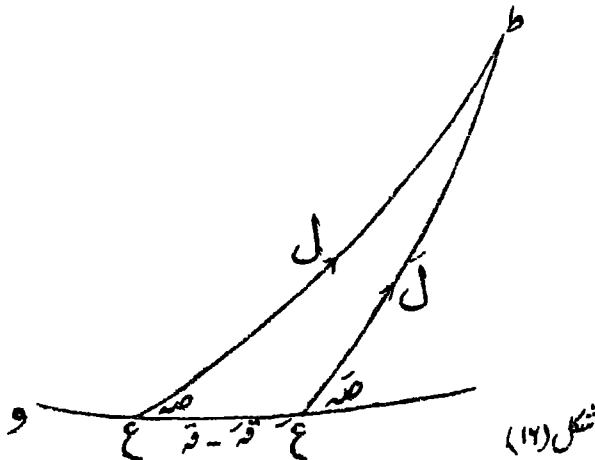
یا دوسرے دائرہ کے صعودی عقدہ قہ کا محل پہلے دائرہ پر

اور نیز میلان صہ دئے جاسکتے ہیں۔ پہلے دائرہ کے مبداء سے مثبت سمت میں چل کر ہم قہ دریافت کر لیتے ہیں اور اس طرح صعودی عقدہ معلوم ہو جاتا ہے۔ اس صعودی عقدہ پر دوسرا بڑا دائرہ پہلے دائرہ کے مثبت نیم کرہ میں داخل ہو رہا ہوگا۔ اگر ہم اس عقدہ سے دو منتشر قوسیں پھینچیں جن کا درمیانی زاویہ صہ ہو تو مطلوبہ دائرہ کا ٹھیک مقام معلوم کرنے میں کوئی ابہام درپیش نہ ہوگا۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ ج کے لحاظ سے ج کا صعودی عقدہ ج کے لحاظ سے ج کا نزولی عقدہ ہے۔

مثال ۲۔ شکل بنا کر یہ بتاؤ کہ ان دو درجہ دار بڑے دائروں کے درمیان کیا فرق ہے جن کے میلان حوالے کے بڑے دائرہ کے ساتھ مساوی ہیں اور جن کے صعودی عقدے مبداء سے فاصلوں طہ اور ط + ۸۰ پر واقع ہیں

مثال ۳۔ اگر ایک بڑے دائرہ ٹی کے صعودی عقدہ کا طول بلد قہ ہو اور اس کا میلان حوالے کے محور کے ساتھ صہ ہو اور اگر دوسرے بڑے دائرہ ٹی کی متناظر مقداریں قہ صہ ہوں تو ٹی پر ٹی کے صعودی عقدہ ط کے محدود معلوم کرو۔ فرض کرو کہ حوالے کے دائرہ و ع ع (شکل ۱۶) پر عقدے ع ع ہیں تب ٹی پر ٹی کا صعودی عقدہ ط ہے۔ فرض کرو کہ فاصلہ ع ط لا ہے۔ اب لا کو صہ اور قہ۔ قہ کی رقوم میں معلوم کرنا ہے۔



دفعہ (۱) کے ضابطہ (۶) سے

مم لا جب (قہ - قہ) جم (قہ - قہ) جم صہ = جب صہ مم صہ
اس لیے مم لا = جم (قہ - قہ) جم صہ = جب صہ مم صہ

جب (قہ - قہ)

اب یہ معلوم کرنے کے لیے کہ لا کی کونسی قیمت لی جائے ہم دیکھتے ہیں کہ

جب لا : جب (قہ - قہ) :: جب صہ : جب ط

اور ط اور صہ دونوں ۱۸۰۔ اس لیے جب لا کی وہی علامت ہونی چاہیے

جو جب (قہ - قہ) کی ہے اور اس سے یہ معلوم ہوگا کہ مطلوبہ زاویہ لایے

یا لا + ۱۸۰۔ جب لا معلوم ہو جائے تو مساواتوں

جب صہ = جب لا جب صہ

جم صہ جم (عہ - قہ) = جم لا

جم صہ جب (عہ - قہ) = جب لا جم صہ

سے ط کے محدود صہ (حوالے کے دائرہ کے لحاظ سے) معلوم ہوتے ہیں۔

مثال ۴۔ پچھلی مثال کے مفروضات کو لیکر ان دو بڑے دائروں کا

درمیانی میدان غہ معلوم کر دو جن کی تعین علی الترتیب قہ صہ اور قہ صہ سے ہوتی ہے۔

ہم معلوم کر چکے ہیں کہ شہلوں کے محدود قہ + ۲۷۰، ۹۰۔ صہ اور

قہ + ۲۷۰، ۹۰۔ صہ ہیں اور اس لیے دفعہ ۱۰ مثال ۲ کی رو سے

جم غہ = جم صہ + جب صہ جب صہ جم (قہ - قہ)

مثال ۵۔ مقادیر (قہ صہ) اور (قہ صہ) سے مشخص ہونیوالے

دو بڑے دائروں کے مشترک عمود کا طول اگر لا ہو تو ثابت کرو کہ

جم لا = جم صہ جم صہ + جب صہ جب صہ جم (قہ - قہ)

۱۲۔ محدودوں کا استعمال۔

فرض کرو کہ ایک نقطہ کے محدود بلحاظ ایک درجہ دار بڑے دائرے

کے دے گئے ہیں تو اکثر اس امر کی ضرورت درپیش ہوتی ہے کہ اسی نقطہ کے

محدود بلحاظ دوسرے درجہ دار بڑے دائرہ کے معلوم کئے جائیں۔
 فرض کرو کہ نقطہ پ کے ابتدائی محدود عہ ضہ ہیں اور نئے نظام میں
 اسی نقطہ پ کے محدود عہ ضہ ہیں۔ فرض کرو کہ اسی طرح کسی اور نقطہ
 پ کے ابتدائی محدود عہ ضہ اور تبدیل شدہ محدود عہ ضہ ہیں۔ اب
 چونکہ اس استحالة سے فاصلہ پ پ متاثر نہیں ہو سکتا اس لیے یہ فاصلہ
 وہی ہونا چاہئے نہا ہم اسے کسی محدودوں میں بیان کریں اور اس لیے (دفعہ ۸)
 جب ضہ جب ضہ + جم ضہ جم (عہ - عہ)

(۳۷)

== جب ضہ جب ضہ + جم ضہ جم (عہ - عہ) ... (۱)
 وہ سب ضابطے جو اس استحالة سے متعلق ہیں فی الحقیقت اس مساوات
 میں شامل ہیں۔

اگر کسی نقطہ پ کے محدودوں نظامات میں معلوم ہوں یعنی
 اگر عہ ضہ، عہ ضہ معلوم ہوں اور اگر ان قیمتوں کو (۱) میں مندرج
 کیا جائے تو عہ ضہ اور عہ ضہ بالعموم ایک مساوات
 حاصل ہوگی۔ اسی طرح کسی اور نقطے کے محدودوں نظامات میں معلوم
 ہوں تو عہ ضہ اور عہ ضہ میں ایک دوسری مساوات حاصل ہوگی۔
 اس طرح عہ ضہ کو عہ ضہ کی رقوم میں بیان کرنے کے لیے دو مساواتیں
 مل جاتی ہیں۔

لیکن عہ ضہ کو عہ ضہ کی رقوم میں بیان نہ طور پر معلوم کر نیکیے لئے
 دو مساواتیں کافی نہیں ہیں کیونکہ فاصلوں پ پ پ پ سے
 پ کا مقام بغیر ابہام کے متعین نہیں ہوتا۔ صرف چار مقامات ہیں جن کو
 پ اختیار کر سکتا ہے۔ ان مقامات کے فاصلے کسی تیسرے نقطہ
 پ سے مساوی نہیں ہوں گے سوائے اس صورت کے کہ پ
 اس بڑے دائرہ پر واقع ہو جائے جو پ پ میں سے گزرتا ہے۔
 اس صورت کو خارج کر کے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کوئی نقطہ صرف اس وقت
 متعین ہو سکتا ہے جبکہ اس کے فاصلے تین دئے ہوئے نقطوں سے

اب ہمیں ایسے تین نقطوں کا انتخاب کرنا ہے جو ایک ہی بڑے دائرہ پر واقع نہ ہوں اور ایسے ہوں کہ ان کے محدودوں نظامات میں بالراست معلوم ہو سکیں۔

جو نقطے ہم منتخب کریں گے وہ علی الترتیب ط، ا اور ش ہیں۔ شکل سے یہ واضح ہے کہ دونوں نظامات میں ان نقطوں کے محدود حسب ذیل ہیں کیونکہ ط = ا = ط = ۹۰ :-

ط کے لیے عب = قہ، ضمہ = ۰ اور عب = قہ، ضمہ = ۰۔
ا کے لیے عب = ۹۰ + قہ، ضمہ = ۰ اور عب = ۹۰ + قہ، ضمہ = ۰۔
ش کے لیے عب = ۰، ضمہ = ۹۰ اور عب = ۹۰ + قہ، ضمہ = ۹۰۔
ان محدودوں کو باری باری سے مساوات (۱) میں درج کرنے سے استحالة کے عام ضابطے حاصل ہوتے ہیں

جم ضمہ جم (عہ - قہ) = جم ضمہ جم (عہ - قہ) (۲)
جم ضمہ جب (عہ - قہ) = جب ضمہ جب صہ + جم ضمہ جم صہ جب (عہ - قہ) (۳)
جب ضمہ = جب ضمہ جم صہ + جم ضمہ جب صہ جب (عہ - قہ) (۴)
ان سے حسب ذیل ضابطے اخذ کئے جاسکتے ہیں

جم ضمہ جم (عہ - قہ) = جم ضمہ جم (عہ - قہ) (۲)
جم ضمہ جب (عہ - قہ) = جب ضمہ جب صہ + جم ضمہ جم صہ جب (عہ - قہ) (۳)
جب ضمہ = جب ضمہ جم صہ + جم ضمہ جب صہ جب (عہ - قہ) (۴)
کیونکہ (۳) کو جم صہ سے اور (۲) کو جب صہ سے ضرب دیکر ان کو جمع کرنے سے (۵) حاصل ہوتا ہے اور (۴) کو جم صہ سے اور (۳) کو جب صہ سے ضرب دیکر تفریق کرنے سے (۶) حاصل ہوتا ہے۔

مساواتوں کے پہلے جٹ سے محدودوں عہ، ضمہ کی تعیین ہوتی ہے جبکہ عہ، ضمہ معلوم ہوں اور دوسرے جٹ سے محدودوں عہ، ضمہ کی تعیین ہوتی ہے جبکہ عہ، ضمہ معلوم ہوں۔

کروی محدودوں کو تبدیل کرنے کے اساسی ضابطے دوسرے طریقہ سے بھی

ثابت کئے جاسکتے ہیں جو حسب ذیل ہے۔
 چونکہ شش شش (شکل ۱۷) کا قطب ط ہے اس لیے زاویہ
 ط شش شش = ۹۰ نیز زاویہ ط شش د = عم - قہ اور اس لیے
 زاویہ شش شش پ = ۹۰ + عم - قہ - نیز ہم دیکھتے ہیں کہ عم - قہ = (۳۹)
 زاویہ ط شش د، اس لیے زاویہ شش شش پ = ۹۰ + عم - قہ۔
 شکل سے یہ بھی ظاہر ہے کہ شش پ = ۹۰ - ضہ، شش پ = ۹۰ - ضہ
 اور شش شش = صہ۔ پس مثلث شش شش پ میں اس کے تین
 ضلعوں اور دو زاویوں کے لیے جملے حاصل ہو گئے اور اس لیے دفعہ (۱)
 کے اساسی ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) سے ہم ضابطے (۲)، (۳)، (۴) اخذ
 کرتے ہیں۔

استعمال کے ضابطوں میں تین مساواتوں کو حاصل کرنے کی ضرورت
 جس کا ذکر پہلے آچکا ہے ضابطوں (۲)، (۵) اور (۶) سے واضح کی جاسکتی ہے
 فرض کرو کہ مساواتوں (۲) اور (۵) سے عم اور ضہ کی قیمتیں
 تلاش کرنی ہیں۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

مس (عم - قہ) = { جب ضہ جب صہ + جم ضہ جب (عم - قہ) کم قطضہ قط (عم - قہ)
 چونکہ بائیں جانب کی سب مقدمات معلومہ ہیں اس لیے مس (عم - قہ) معلوم
 ہو جاتا ہے۔ فرض کرو کہ وہ زاویہ (۱۸۰) ط ہے جس کے حماس کی
 قیمت یہ ہے تب (عم - قہ) کو ہونا چاہئے ط یا صہ + ۱۸۰۔ ہم مساوات
 (۲) سے اس بات کا تصفیہ کر سکتے ہیں کہ عم - قہ کے لیے کونسی قیمت
 لینی چاہئے کیونکہ ضہ اور ضہ ہمیشہ حدود ۹۰ اور ۹۰ کے درمیان رہتے
 ہیں اور اس لیے ضروری ہے کہ جم ضہ اور جم ضہ دونوں مثبت ہوں۔
 اس لیے جم (عم - قہ) کی علامت وہی ہونی چاہئے جو جم (عم - قہ) کی
 ہے۔ اس طرح یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ عم - قہ کو ط ہونا چاہئے یا ۱۸۰ + ط
 کیونکہ ان میں صرف ایک قیمت ایسی ہوگی جو علامت میں جم (عم - قہ)

کے ساتھ مطابقت کرے گی۔

پس ان دو مساواتوں (۶) اور (۵) سے (عہ۔ قہ) بغیر کسی ابہام کے متعین ہوتا ہے اور اس لیے عہ معلوم ہوتا ہے۔ پھر ہم (۶) سے جم ضہ معلوم کرتے ہیں۔ یہاں پہنچ کر دو مساواتوں کا ناکافی ہونا واضح ہو جاتا ہے کیونکہ گو ضہ کی مقدار معلوم ہو جاتی ہے لیکن اس کی علامت غیر متعین رہتی ہے۔ اس لیے (۶) جیسی تیسری مساوات کی ضرورت لاحق ہوتی ہے جس سے جب ضہ کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور اس لیے ضہ کی علامت متعین ہو جاتی ہے۔

عہ ضہ کو مساواتوں (۶) اور (۵) سے معلوم کرنے کا مسئلہ اس طرح بھی حل کیا جاسکتا ہے :-

مساوات (۶) سے جب ضہ کی تعیین ہوتی ہے اور اس لیے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ضہ دو تکمیلی زاویوں میں سے کوئی سا زاویہ ہے۔ کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ 90° ضہ 90° اور اس لیے ضہ کے لیے ہم تکمیلی زاویوں میں سے وہ قیمت اختیار کرتے ہیں جو اس شرط کو پوری کرتی ہے اس طرح ضہ معلوم ہوتا ہے اور اس لیے جم ضہ۔ پھر مساوات (۶) سے جم (عہ۔ قہ) حاصل ہوتا ہے اور مساوات (۵) سے جب (عہ۔ قہ) اس لیے عہ۔ قہ بغیر کسی ابہام کے متعین ہوتا ہے کیونکہ اس کی جیب اور جیب تمام دونوں معلوم ہیں۔

مثال ۱۔ اگر $عہ = 90^\circ$ ، $قہ = 90^\circ$ ، تو ثابت کرو کہ $عہ + قہ = 90^\circ$ ضہ = صہ اور وہ نقطہ معلوم کرو جو کرہ پر مشتم ہوتا ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ $قہ$ کے شطب کے محدود پہلے اور دوسرے نظاموں میں علی الترتیب

$$عہ = 90^\circ + قہ، قہ = 90^\circ - صہ$$

اور غیر متعین اور ضہ = 90° ہیں۔ نیز اس امر کی تصدیق کرو کہ یہ مقادیر مساواتوں (۶) (۳) (۴) کو پورا کرتی ہیں۔

مثال ۳۔ مساواتوں (۲)، (۳)، (۴) کی تصدیق کے طور پر یہ بتاؤ کہ بائیں جانب کے ارکان کے مربعوں کا مجموعہ ایک کے مساوی ہے۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ مساواتوں (۳) اور (۴) سے مساواتیں (۵) اور (۶) فوراً لکھی جاسکتی تھیں۔

کیونکہ ط، و، ز کے لحاظ سے و، کا نزولی عقدہ ہے۔ اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ عہ اور ضہ کو عہ اور ضہ کے ساتھ باہم متبدل کیا جاسکتا ہے اگر ساتھ ہی قہ اور قہ میں سے ہر ایک میں ۱۸۰ کا اضافہ کیا جائے۔

مثال ۵۔ اگر دو درجہ دار بڑے دائروں کے مستوی منطبق ہوں اور اگر کرہ پر کے کسی نقطہ کے محدود ایک بڑے دائرہ کے لحاظ سے عہ، ضہ اور دوسرے بڑے دائرہ کے لحاظ سے عہ، ضہ ہوں تو ان محدودوں میں ربط معلوم کرو۔

عام ضابطوں (۲)، (۳)، (۴) میں ہم صہ = رکھتے ہیں اگر ان دو دائروں کی درجہ بندی ایک ہی سمت میں ہوئی ہو اور صہ = ۱۸۰ رکھتے ہیں اگر ان کی درجہ بندی مخالف سمتوں میں ہوئی ہو۔ پہلی صورت میں

$$\text{جم ضہ (عہ - قہ)} = \text{جم ضہ (جم - عہ - قہ)}$$

$$\text{جم ضہ جب (عہ - قہ)} = \text{جم ضہ جب (جم - عہ - قہ)}$$

$$\text{جب ضہ} = \text{جب ضہ}$$

$$\text{اس لیے ضہ} = \text{ضہ اور عہ} = \text{عہ} + \text{قہ} - \text{قہ}$$

دوسری صورت میں

$$\text{جم ضہ (جم - عہ - قہ)} = \text{جم ضہ (جم - عہ - قہ)}$$

$$\text{جم ضہ جب (عہ - قہ)} = \text{جم ضہ جب (جم - عہ - قہ)}$$

$$\text{جب ضہ} = \text{جب ضہ}$$

$$\text{اس لیے ضہ} = \text{ضہ} + \text{عہ} - \text{قہ} - \text{قہ}$$

محدود ضہ یہاں علامت بدلتا ہے کیونکہ درجہ بندی کی سمت کو الٹ دینے سے مثبت اور منفی نیم کرّوں کا باہمی تبادلہ ہوتا ہے۔

مثال ۶ - فرض کرو کہ بنیادی درجہ دار تہا دائرہ میں ہے اور فرض کرو کہ کسی نقطہ پ کے محدود لمحاظ میں کے بہ 'لہ' ہیں۔ فرض کرو کہ میں کوئی دوسرا درجہ دار بڑا دائرہ ہے اور اس کے شطب کے محدود لمحاظ میں کے بہ 'لہ' ہیں۔ فرض کرو کہ میں پر میں کے صعودی غنہ کی علامت قبہ سے میں کے لمحاظ سے درجے 'منٹ' اور ثنائے تعبیر ہو۔ یہاں - فرض کرو کہ میں کے لمحاظ سے پ کے محدود بہ 'لہ' ہیں۔ ثابت کرو کہ بہ 'لہ' کو بہ 'لہ' کی رقوم میں معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل مساواتیں ہیں

$$\left. \begin{aligned} \text{جم بہ جم (لہ - قبہ)} &= \text{جم بہ جب (لہ - لہ)} \\ \text{جم بہ جب (لہ - قبہ)} &= \text{جب بہ جم بہ - جم بہ جب بہ جم (لہ - لہ)} \\ \text{جب بہ} &= \text{جب بہ جب بہ + جم بہ جم بہ جم (لہ - لہ)} \end{aligned} \right\} \text{اور بہ 'لہ' کو بہ 'لہ' کی رقوم میں معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل مساواتیں ہیں}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{جم بہ جب (لہ - لہ)} &= \text{جم بہ جم (لہ - قبہ)} \\ \text{جم بہ جم (لہ - لہ)} &= \text{جب بہ جم بہ - جم بہ جب بہ جب (لہ - قبہ)} \\ \text{جب بہ} &= \text{جب بہ جب بہ + جم بہ جم بہ جب (لہ - قبہ)} \end{aligned} \right\}$$

مثال ۷ - فرض کرو کہ دو ستاروں کے محدود پہلے نظام میں عم 'ضم' اور عم 'ضم' اور دوسرے نظام میں عم 'ضم' اور عم 'ضم' ہیں۔ چونکہ دو ستاروں کا باہمی فاصلہ دونوں نظاموں میں وہی ہونا چاہئے اس لیے

$$\text{جب ضم جب ضم + جم ضم جم ضم (عم - عم)} \\ = \text{جب ضم جب ضم + جم ضم جم ضم (عم - عم)}$$

اس کی تصدیق مساواتوں (۶)، (۳)، (۴) سے کرو۔

مثال ۸ - کرہ پر کے محدودوں میں ان تبدیلیوں کی تشریح کرو جو کرہ کو اندر کی طرف سے یا باہر کی طرف سے دیکھنے میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور ثابت کرو کہ ضابطے غیر متغیر رہتے ہیں۔

کرہ کو باہر کی طرف سے دیکھنے میں وہ جیسا نظر آتا ہے اس کی بنا پر

شکل (۱۷) پینچی گئی ہے اور بالعموم شطیں اسی لحاظ سے کھینچی جاتی ہیں۔
 لیکن اگر ہم چاہیں کہ شکل (۱۷) کرہ کے ایک حصہ کو تغیر کر سب جیکر اسے
 اندر کی طرف بے دیکھا جائے تو ط نزولی عقدہ ہوگا۔ پس ضابطوں میں
 قہ اور ضہ کی بجائے ۱۸۰ + قہ اور ضہ لکھنا ہوگا اور اسی طرح
 قہ ضہ کی بجائے ۱۸۰ + قہ اور ضہ۔ لیکن ان تبدیلیوں سے ضابطوں
 (۲) (۵) (۶) میں کوئی تغیر نہیں ہوتا۔

مثال ۹۔ اگر دو نقطوں کے محدود ضہ اور عہ ضہ ہوں تو
 ثابت کر دو کہ اس بڑے دائرہ کے عقدے جو انہیں ملاتا ہے مبداء سے فاصلوں
 ل اور ل + ۱۸۰ پر واقع ہیں جہاں

$$ل = \frac{۱}{۲} (عہ + عہ) - مس \left\{ \begin{array}{l} جب (ضہ + ضہ) مس \frac{۱}{۲} (عہ - عہ) \end{array} \right\}$$

۱۳۔ لوکارتموں کا استعمال۔ اگر استحال شدہ محدودوں عہ ضہ

کو محسوب کرنے میں مساواتیں (۲) (۵) (۶) اسی شکل میں استعمال
 کی جائیں جس میں وہ دفتہ (۱۲) میں لکھی گئی ہیں تو مساوات (۶) کی بائیں جانب
 کی دو رقموں کو لوکارتموں کی مدد سے محسوب کرنا ہوگا اور پھر ضہ کو طبعی
 جیوب کی جدول سے معلوم کرنا ہوگا۔ مساوات (۲) سے حجم (عہ - قہ)
 معلوم ہوگا اور مساوات (۵) صرف عہ - قہ کی علامت متعین کرنے میں
 استعمال ہوگی اس کے لیے صرف بائیں جانب کی دو رقموں کے لوکارتموں
 کو محسوب کرنے کی ضرورت ہے اگرچہ یہ رقمیں مختلف علامت ہی کیوں
 نہ ہوں۔

لیکن اکثر سہولت اس میں خیال کی گئی ہے کہ ضابطوں (۲) (۵)
 (۶) کا استعمال ایسی امدادی مقداروں کے ذریعہ عمل میں لایا جائے جن کے
 ادخال سے یہ ضابطے لوکارتمی عمل حساب کے لیے زیادہ موزوں ہو جاتے
 ہیں۔ ایسا کرنے کا بہترین طریقہ حسب ذیل ہے:-

فرض کرو کہ m ایک مثبت مقدار ہے اور m صفر اور ۳۶۰ کے درمیان ایک زاویہ ہے اور یہ دونوں مقداریں ایسی ہیں کہ

جب $ضہ = m$ جم $ہر$ ، جم $ضہ$ جب $(عہ - قہ) = m$ جب $م$ اس لیے $مس م = مم$ ضہ جب $(عہ - قہ)$ ۔ اگر $م$ وہ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ ہے جو اسے پورا کرتا ہے تو $م$ ہر ہے یا ۱۸۰ ۔ چونکہ m مثبت ہے اس لیے $م$ کی وہ قیمت منتخب کرنی چاہئے کہ $جم م$ کی وہی علامت حاصل ہو جو جب $ضہ$ کی ہے۔ اس طرح لو کہ m اور $م$ معلوم ہو جاتے ہیں۔ ان امدادی مقداروں کو (۲) ، (۵) ، (۶) میں درج کرنے سے یہ مساواتیں حسب ذیل ہو جاتی ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جم ضہ جم (عہ - قہ) = جم ضہ جم (عہ - قہ)} \\ \text{جم ضہ جب (عہ - قہ) = م جب (م + ضہ)} \dots\dots (۱) \\ \text{جب ضہ = م جم (م + ضہ)} \end{array} \right.$$

ان میں سے آخری ضابطے سے $ضہ$ کی مقدار $(۹۰$ اور علامت دونوں حاصل ہوتے ہیں۔ اس قیمت کو دوسرے دو ضابطوں میں درج کرنے سے $جم (عہ - قہ)$ اور جب $(عہ - قہ)$ دونوں معلوم ہوتے ہیں۔ پہلے ضابطے سے $عہ - قہ$ کی مقدار ملتی ہے اور دوسرے سے اس کی علامت

مثال ۱۔ ایک نقطہ کے محدود $عہ = ۵۰$ ، $ضہ = ۱۵$ ہیں۔ ضابطوں (۲) ، (۵) ، (۶) سے ثابت کرو کہ جب ان محدودوں کو مقداروں $قہ = ۲۱۵$ ،

$ضہ = ۳۰$ ، $قہ = ۱۱۵$ سے متعین ہونے والے دائرہ کے لحاظ سے مستحیل کیا جاتا ہے تو یہ محدود ہو جاتے ہیں $عہ = ۳۲$ ، $ضہ = ۲۹$ ۔

مثال ۲۔ اگر مثال ۱ کو امدادی مقداروں $م$ اور $م$ کی مدد سے حل کیا جائے تو ثابت کرو کہ $م = ۳۸$ ، $قہ = ۹۲$ اور $م = ۹۶۸۲۷۸$ ۔

مثال ۳۔ اگر $ط پ$ کو (شکل ۱) خارج کرنے پر وہ $شش$ سے $ک$ پر ملے تو ثابت کرو کہ $م = جم پ ک$ اور $م = شش ک$ ۔ نیز قائم الزاویہ مثلث $شش پ ک$ سے ضوابط (۱) حاصل کرو۔

تیسرا باب

زمین کی شکل اور نقشہ کشی

(۴۳)

صفحہ	دفعہ
۶۵	۱۴ - تمہیدیہ
۶۶	۱۵ - عرض بلد
۷۱	۱۶ - نصف النہار پر نصف قطر انحناء
۷۵	۱۷ - نقشہ کشی کا نقشہ
۷۷	۱۸ - نقشہ کے ہم شکل ہونے کی شرطیں
۸۱	۱۹ - ہم شکل تعبیر میں پیمانہ
۸۱	۲۰ - مرکب (Mercator) کا ظل
۸۶	۲۱ - مساوی المیلان
۸۹	۲۲ - تسطیحی اظلال
۹۳	۲۳ - کرہ پر کسی دائرہ کا تسطیحی ظل بھی ایک دائرہ ہوتا ہے
۹۶	۲۴ - تسطیحی ظل کے لیے عام ضابطے
	۲۵ - ایسا نقشہ بنانا جس میں کرہ پر کا ہر رقبہ، نقشہ پر مساوی رقبہ کے
۹۹	ذریعہ تعبیر ہو
	۱۴ - تمہیدیہ
	ہم دیکھتے ہیں کہ سورج چاند اور دیگر اجرام فلکی کی شکلیں گول ہیں اس سے

اس امر کا پتہ چلتا ہے کہ زمین کی شکل بھی گول ہوئی چاہئے۔ اس کا ثبوت جو روزمرہ حقائق سے دیا جاتا ہے جغرافیہ کی کتابوں میں ملے گا۔
زمین کی شکل کی صحیح پیمائش علم ہیئت میں بنیادی اہمیت رکھتی ہے اور یہ باب اس مضمون کے ابتدائی حصوں کے لیے وقف ہوگا اور اس کی تشریح کی جائے گی کہ زمین جیسی منحنی سطحیں کس طرح مستوی سطحوں کی تعبیر کی جاسکتی ہیں جیسا کہ نقشہ کشی میں کیا جاتا ہے۔

یہ واضح کر دینا ضروری ہے کہ جملہ "زمین کی شکل" سے مراد اس کی وہ بے قاعدہ اور بے ڈھنگی سطح نہیں ہے جو خشکی اور تری میں منقسم ہے اور جیسے ہم فی الواقع اُسے دیکھتے ہیں بلکہ اس جملہ سے وہ سطح مراد ہے جس کا کچھ حصہ ساکن سمندر سے ظاہر ہوتا ہے اور جو دیگر حصوں میں اس ہموار سطح پر منطبق خیال کی جاسکتی ہے جس تک پانی اُس مقام پر چڑھتا اگر اُسے نبروں کے ذریعہ سمندر سے آزادانہ آنے دیا جاتا، ہم تصور کر سکتے ہیں کہ ایسی نہریں ایک سمندر سے دوسرے سمندر تک براعظموں کو عبور کر رہی ہیں۔

۱۵۔ عرض بلد۔

(۴۴)

اگر زمین کو ایک کرہ تصور کیا جائے تو زمین کی سطح پر کسی مقام کا عرض بلد اس مقام کو زمین کے مرکز سے ملانے والے ارضی نصف قطر اور ارضی خط استوا کے مستوی کا درمیانی میدان ہوتا ہے۔ لیکن زمین کی حقیقی شکل کروئی نہیں ہے بلکہ اس کی شکل قریب قریب اُس گردشی کرہ نمائی ہے جو ایک قطع ناقص کو اس کے محور اصغر کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس ناقص کے نیم محوروں کے طول جو کرنل کلارک نے دے دیے ہیں حسب ذیل ہیں:-

$$1 = 2092620.2 \text{ فٹ} [6372990.4]$$

$$= 396343 \text{ میل} [6378136]$$

۱۔ دیکھو "جیوڈیسی" کلائرنڈن پریس، ۱۸۸۰ء، صفحہ ۳۱۹۔

$$= ۶۳۷۸۶۲ \text{ کیلومیٹر } [۳۶۸۰۳۲۲]$$

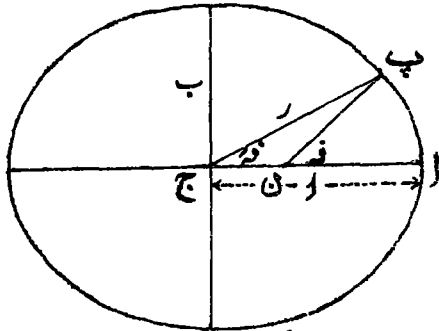
$$= ۲۰۸۵۳۸۹۵ \text{ فٹ } [۷۶۳۱۹۲۰۸۰]$$

$$= (تقریباً) ۳۹۳۹۵۸ \text{ میل } [۳۶۵۹۲۵۷]$$

$$= ۶۳۵۶۵۵ \text{ کیلومیٹر } [۳۶۸۰۳۲۲]$$

خطوط ودیاتی کے اندر کے عدد ان عددوں کے لوکارتم ہیں جو ان کے ساتھ لگے ہوئے ہیں۔

اگر زمین کی سطح کے کسی نقطہ پ پر کاغذ پ ن (شکل ۱۸) خط استوا کے مستوی سے ن پر ملے اور ج ن (نیم محور اعظم ہو تو زاویہ پ ن (= فہ)
پ کا جغرافیائی عرض بلد ہے اور زاویہ پ ج (= فہ) اس کا ارض
مرکزی (Geocentric) عرض بلد ہے۔



شکل (۱۸)

اگر قطع ناقص کی مساوات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ہو اور پ کے

محدد جس کا خارج المکرز زاویہ (Excentric angle) لہ ہے لا اور ماہوں

تو ہم آسانی کے ساتھ یہ دیکھتے ہیں کہ

$$\text{مس فہ} = \text{مس لہ} \text{ ب، مس فہ} = \text{مس لہ} \text{ ا}$$

(۴۵) اور فہ اور فہ میں ربط ہے مس فہ = ب مس فہ ا و جس سے
ارض مرکزی عرض بلد حاصل ہوتا ہے جبکہ حقیقی یا جغرافیائی عرض بلد معلوم ہو
یا اس کے برعکس۔

ہم رکوجب کا ارض مرکزی فاصلہ ہے اس طرح معلوم کرتے ہیں :-

$$ر^۲ = لا^۲ + ما^۲ = وا^۲ جم^۲ + ب^۲ جب^۲$$

$$\frac{وا^۲ جم^۲ + ب^۲ جب^۲}{وا^۲ جم^۲ + ب^۲ جب^۲} =$$

$$= \frac{وا^۲ جم^۲ + (ا-ز)^۲ جب^۲}{ا-ز جب^۲} = \frac{وا^۲ (ا-ز جب^۲)}{ا-ز جب^۲}$$

اگر ز کی دو سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کر دی جائیں۔
انہی شرطوں کے تحت

$$مس (فہ - فہ) = \frac{مس فہ - مس فہ}{ا + مس فہ} = \frac{(ا - ب)^۲ مس فہ}{ا + مس فہ} = ز جب فہ جم فہ$$

اور اس لیے ہم حسب ذیل نتیجے پر پہنچتے ہیں :-
اگر زمین کے متعلق یہ سمجھا جائے کہ وہ ایک ناقص کو جس کا خروج مرکز
ز ہے اس کے محور اصغر کے گرد گھمانے سے پیدا ہوئی ہے اور اگر زمین کا استوائی
نصف قطر اکائی کے طور پر لیا جائے تو زمین کی سطح پر جس نقطہ کا جغرافیائی
عرض بلد فہ ہو اس کا تقربی ارض مرکزی عرض بلد اور سمتی نصف قطر
حسب ذیل ہوں گے :-

$$فہ = فہ - \frac{۱}{۴} [ز^۲ ق م ا جب ۲ فہ]$$

$$ر = ۱ - \frac{۱}{۴} ز^۲ + \frac{۱}{۴} ز^۲ جم ۲ فہ$$

واحد ب کی مندرجہ بالا کلارک کی قیمتیں استعمال کرنے سے

$$ز^۲ = (ا - ب)^۲ \setminus وا^۲ = ۱ \setminus ۱۴۷$$

اور اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

فہ = فہ - ۰.۲ جب ۲ فہ = فہ - [۲۶۸۴۶۰] جب ۲ فہ
 ر = ۶۹۹۸۳ + [۴۶۲۳۰.۶] جم ۲ فہ
 اس لیے جغرافیٰ عرض بلد میں سے ۰.۲ جب ۲ فہ تفریق کرنا ہوگا
 تاکہ ارض مرکزی عرض بلد حاصل ہو۔
 اگر تقرب اس سے اعلیٰ تر درجہ تک حاصل کرنا ہو تو حسب ذیل
 طریقہ پر عمل کیا جاسکتا ہے :-

$$\text{مس (فہ - فہ)} = \frac{(\text{و} - \text{ب}) \text{ مس فہ}}{(\text{و} + \text{ب}) \text{ مس فہ} + (\text{و} - \text{ب}) \text{ جم ۲ فہ}}$$

اس سے آسانی کے ساتھ تقریبی ضابطہ

فہ - فہ = $\frac{(\text{و} - \text{ب}) \text{ قم آجب ۲ فہ}}{(\text{و} + \text{ب})}$ - $\frac{1}{2} (\frac{\text{و} - \text{ب}}{\text{و} + \text{ب}}) \text{ قم آجب ۴ فہ}$
 حاصل ہوتا ہے۔
 فہ اور ر کو صحیح طور پر محسوب کرنے کے لیے حسب ذیل طریقہ ہے
 جو اکثر استعمال کیا جاتا ہے :-

(۴۶) و کو اکائی کے طور پر لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{رجم فہ} = \text{لا} = \text{جم لہ} = \text{جم فہ} \sqrt{1 - \text{ز آجب فہ}}$$

$$\text{رجب فہ} = \text{ما} = \text{ب جب لہ} = (1 - \text{ز}) \text{ جب فہ} \sqrt{1 - \text{ز آجب فہ}}$$

اس لیے اگر ہم رکھیں

$$\text{لا} = \frac{(1 - \text{ز})}{\sqrt{1 - \text{ز آجب فہ}}} \text{ ما} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{ز آجب فہ}}}$$

تو حاصل ہوتا ہے۔ رجب فہ = لاجب فہ، رجم فہ = ماجم فہ

فہ کے ہر درجہ کے جواب میں مقداروں لا اور ما کی قیمتیں یغیریں

میں ملیں گی۔ چونکہ لا اور ما میں جب فہ ۱ ز ۲ سے مضروب ہے اس لیے فہ میں ایک چھوٹی خطا واقع ہو تو اس سے لا اور ما پر کوئی قابل قدر اثر نہیں پڑے گا۔ پس لوک لا اور لوک ما بغیر کسی تکلیف وہ بنی اور لا کے صرف جدول دیکھ لینے سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ پھر لوک لا اور لوک ما میں علی الترتیب لوک جب فہ اور لوک جم فہ کی ٹھیک ٹھیک قیمتیں جمع کرنے سے ہم لوک ر جب فہ اور لوک ر جم فہ معلوم کرتے ہیں اور پھر لا اور فہ سے لوک لا اور لوک ما کے درمیان فرق مستقل ہے۔ اس طریقہ کے اطلاق کی ایک مثال کے طور پر ہم حسب ذیل صورت لے سکتے ہیں:-

کیمبرج کا جغرافیائی عرض بلد ۵۲° ۱۲' ۵۲" ہے۔ ثابت کرو کہ ارض مرکزی عرض بلد معلوم کرنے میں جو تخفیف استعمال کرنی ہوگی وہ - ۱۱' ۲۲" ہے۔ نیز کیمبرج کا فاصلہ زمین کے مرکز سے معلوم کرو اگر زمین کے استوائی نصف قطر کو اکائی کے طور پر لیا جائے۔

لوک ما = ۹۲۳۷۰۰۰	ل لا = ۹۵۹۹۷۹۹
ل جم فہ = ۹۶۷۸۷۲۵۳۳	ل جب فہ = ۹۶۸۹۷۷۹۷۲
ل ر جم فہ = ۹۶۷۸۸۱۷۸۱	ل ر جب فہ = ۹۶۸۹۵۷۵۷۱
	ل ر جب فہ = ۹۶۷۸۸۱۷۸۱
	مس فہ = ۰.۵۱۰۷۵۷۹۰
فہ ۵۲° ۱۲' ۵۲"	ل ر جب فہ = ۹۶۸۹۵۷۵۷۱
فہ ۵۲° ۱' ۳۰"	ل جب فہ = ۹۶۸۹۶۶۸۰۱
فہ = ۵۲° ۱۱' ۲۲"	ل ر = ۹۶۹۹۹۰۷۷۰
	۰.۵۹۹۷۸۸ = ۱

۱۔ اس عرض بلد اور لوک ر کی تخفیف کا صاب لگانے میں مدد دینے کے لیے ای۔ جی۔ اسٹون نے ایک جدول "Monthly Notices" R.A.S. vol. xliii میں دی ہے۔

لی بلاشبہ رجم فہ سے بھی معلوم ہو سکتا تھا لیکن رجب فہ کے رجم فہ اور ہم نے ان دو مقداروں میں سے بڑی مقدار کو استعمال کرنے میں قاعدہ (صفحہ ۱۰) کی پابندی کی ہے۔

مثال ۱۔ زمین کی شکل کے لیے کھارک کے عناصر (۱ اور ۲) کی قیمتیں استعمال کر کے ثابت کرو کہ

$$\text{مس فہ} = [9,994,0252] \text{ مس ذ}$$

جہاں خطوط وحدانی کے اندر کے عدد سے ایک جدولی لوکارتم تعبیر ہوتا ہے۔ نیز اگر یہ معلوم ہو کہ گرینچ کا جغرافی عرض بلد ۵۱° ۲۸' ہے تو ثابت کرو کہ اس کا ارض مرکزی عرض بلد ۵۱° ۱۱' ہے۔

مثال ۲۔ اگر زکی دو سے اعلیٰ ترقوتیں نظر انداز کر دی جائیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا} = ۱ - \frac{۳}{۴} \text{ ز} - \frac{۱}{۴} \text{ ز}^۲ \text{ جم ۲ فہ}$$

$$\text{ما} = ۱ + \frac{۱}{۴} \text{ ز} - \frac{۱}{۴} \text{ ز}^۲ \text{ جم ۲ فہ}$$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ لی لا اور لی ما کی جدولیں اعشاریہ کے پانچ مقامات کی حد تک مساواتوں

$$\text{لی لا} = 9,994,448 - ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰ \text{ جم ۲ فہ}$$

$$\text{لی ما} = ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰ - ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰ \text{ جم ۲ فہ}$$

سے مسبب کر کے تیار کی جاسکتی ہیں۔

۱۶۔ نصف النہار پر نصف قطر انحناء۔

زمین کا انحناء نصف النہار کے کسی نقطہ پر اس لٹمی دائرہ کے انحناء کے مساوی ہوتا ہے جو ناقص کے اس نقطہ پر کھینچا گیا ہو۔ اگر اس قطع ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ پر کسی نقطہ کے محدد حجم طہ ب جب طہ

ہوں تو اس نقطہ پر کے عماد کی مساوات ہے
 ۱) لا جب طہ - ب ما جم طہ = (۱ - ب^۱) جب طہ جم طہ (۱)
 اور عرض بلد نہ یا وہ زاویہ جو یہ عماد محور اعظم کے ساتھ بناتا ہے مساوات
 مس نہ = مس طہ \ ب
 سے معلوم ہوتا ہے -

مرکز انحناء دو متصلہ عمادوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے - اس لیے (۱) کو
 طہ کے لحاظ سے تفریق کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مرکز انحناء کے محدودوں کو
 مساوات

۲) لا جم طہ + ب ما جب طہ = (۱ - ب^۱) جب ۲ طہ
 پوری کرنی چاہئے -

اب (۱) اور (۲) کو لا اور ما کے لیے حل کیا جائے تو مرکز انحناء کے
 مسب ذیل عدد حاصل ہوتے ہیں

لا = (۱ - ب^۱) جم طہ \ ۱ + ما = (ب^۱ - ۱) جب ۲ طہ \ ب
 اور اس لیے نصف قطر انحناء

س = (۱ + جب ۲ طہ + ب^۲ جم ۲ طہ) \ ۲ \ ب

یا نہ کی رقوم میں

س = ۱ + ب^۱ (ب^۱ جب ۲ نہ + ۱ جم ۲ نہ) \ ۲

۲۸۱) ہے - پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ہی نصف النہار پر دو نقطوں کا درمیانی
 فاصلہ س ہو اور ان کے جغرافی عرض بلد نیم قطری زاویوں میں علی الترتیب
 نہ اور نہ ہوں تو

س = ۱ + ب^۱ (ب^۱ جب ۲ نہ + ۱ جم ۲ نہ) \ ۲ \ فر نہ

اس سے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر خروج المرکز کی دو سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کی جائیں تو عرض بلدوں فہ اور فہ کو ملانے والی قوتیں کی تقریبی قیمت یہ ہے

$$س = (1 - \frac{1}{4} ج) (فہ - فہ) - \frac{3}{4} ج جب (فہ - فہ) جم (فہ + فہ)$$

جہاں ج = (ب - ۱)، مقدار $\frac{ج}{۱}$ کو بالعموم ناقصیت (Ellipticity) کہا جاتا ہے۔

نیز عرض بلد فہ پر نصف النہار کے نصف قطر انحاء کے لیے یہ جملہ حاصل ہوتا ہے

$$۱ - \frac{1}{4} ج - \frac{3}{4} ج جم ۲ فہ$$

اور نصف النہار کے ربع کا تقریبی طول $\pi (ب + ۱)$ ہے۔
مثال ۱۔ اگر عرض بلدوں ۶۰ اور ۴۵ پر نصف النہاروں کے ایک درجہ کے طول علی الترتیب س، اور س، ہوں تو ثابت کرو کہ زمین کی ناقصیت اگر زمین کو ایک گردشی کرہ سمجھا گیا ہو $\frac{۱}{۱۱}$ (س، س، ۱) ہے۔

عرض بلد فہ پر نصف النہار کے نصف قطر انحاء کا طول $۱ - \frac{1}{4} ج - \frac{3}{4} ج جم ۲ فہ$ ہے۔ اس لیے عرض بلد فہ پر کا طول

$$(۱ - \frac{1}{4} ج - \frac{3}{4} ج جم ۲ فہ) \pi ۲$$

$$س = (۱ + \frac{1}{4} ج) \pi ۲$$

$$س = (۱ - \frac{1}{4} ج) \pi ۲$$

$$اس لیے \frac{س}{س} - ۱ = \frac{۳}{۴} ج$$

مثال ۲۔ اگر زمی چوتھی قوتوں تک نہیں لی جائیں تو ثابت کرو کہ جغرافی عرض بلد فہ کے کسی نقطہ پر نصف النہار کے نصف قطر انحاء کے لیے جملہ ہے

$$کا = (۱ - \frac{1}{۴} ج - \frac{۳}{۴} ج) - \frac{۳}{۴} ج - \frac{۳}{۱۶} ج جم ۲ فہ + \frac{۱۵}{۶۴} ج جم ۴ فہ$$

مثال ۳۔ زمین کو گردش کرہ غائب کر اور اس کے نیم محوروں کو کلا رک کے متعلق کے مساوی لیکر ثابت کرو کہ قطب سے خط استوا تک کھینچے ہوئے نصف النہار کے ربع میں میٹروں کی تعداد ۱۸۶۰۰۰۱ ہے۔ (لوک میٹر فٹوں میں = ۵۹۸۸۹)۔

مثال ۴۔ کلا رک کی جیوڈیسی (Gendasy) صفحہ ۱۱۲ میں یہ لکھا ہے "ارضیاتی اعمال حساب میں یہ رواج ہے کہ کسی نصف النہار پر پیمائش کردہ فاصلہ کو جبکہ یہ فاصلہ ایک درجہ سے متجاوز نہ ہوتا ہو عرض بلد کے فرق میں اس طرح تبدیل کرتے ہیں کہ اس طول کو اس نصف قطر انحاء سے تقسیم کرتے ہیں جو سطحی نقطہ کے یا زیادہ صحیح طور پر حدودی (مسروں پر کے) عرض بلدوں کے اوسط کے متناظر حاصل ہوتا ہے۔"

اگر $\phi + \frac{1}{2}$ اور $\phi - \frac{1}{2}$ انتہائی عرض بلد ہوں تو ثابت کرو کہ اس مفروضہ کو اختیار کرنے سے تقریباً $\frac{1}{2}$ (ب) جب ϕ جم ۲۰ کی خطا ہوگی۔ کیونکہ قوس $s = (1 - \frac{1}{2})$ جب $\frac{3}{4}$ جب ϕ جم ۲۰ جیسا کہ قبل ازیں دکھایا جا چکا ہے، لیکن مفروضہ قوس $(1 - \frac{1}{2})$ جب $\frac{3}{4}$ جب ϕ جم ۲۰ ہے۔ اس لیے ان کا فرق ہے

$$\frac{3}{4} \text{ جب } \phi \text{ جم } ۲۰ = (1 - \frac{1}{2}) \text{ جب } \phi \text{ جم } ۲۰ = \frac{1}{4} \text{ جب } \phi \text{ جم } ۲۰$$

کیونکہ ϕ چھوٹا ہے۔ یہ فرق انچوں میں تقریباً

$$۲۱.۴ \text{ جب } \phi \text{ جم } ۲۰$$

ہے جو تقریباً نصف انچ ہوگا اگر $\phi = ۶۰^\circ$ اور $\phi = ۱$ ۔

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ عرض بلد ϕ سے عرض بلد $\phi + 1$ تک نصف النہار پر چلنے سے فٹوں کی تعداد جو عبور کرنی ہوگی وہ

$$۶۰.۷۷ - ۲۱ \text{ جم } ۲۰$$

مثال ۶۔ اگر عرض بلد ϕ کے تو ازی کا نصف قطر لا میل ہو اور اس تو ازی کا ارتفاع خط استوا کے اوپر مایل ہو تو کلا رک کے مفروضات

تسلیم کر کے ثابت کرو کہ

$$لا = ۳۹۶۶۱۷۷ - ۳۹۶۶۱۷۷ \text{ جم } ۳۷۷$$

$$ما = ۳۹۶۶۱۷۷ - ۳۹۶۶۱۷۷ \text{ جب } ۳۷۷$$

نیز ثابت کرو کہ اگر عرض بلد فہ پر نصف النہار کا نصف قطر انحدار ہو تو

$$۷ = ۳۹۵۶۶۶۶ - ۲۰۶۶۶ \text{ جم } ۲۷۷$$

مثال ۷۔ کلارک کے مستقلوں سے ثابت کرو کہ عرض بلد فہ پر

نصف النہار کے ایک درجہ کا طول فٹوں میں

$$۳۶۷۶۰۹ - ۱۸۶۷۷ \text{ جم } ۲۷۷ + ۲۷۷ \text{ جم } ۲۷۷$$

سے تعبیر ہوتا ہے جہاں فہ قوس کے وسطی نقطہ کا عرض بلد ہے۔ نیز ثبات
کرو کہ طول بلد کے ایک درجہ کا طول

$$۳۶۵۵۲۳ \text{ جم } ۲۷۷ - ۳۱۲ \text{ جم } ۲۷۷$$

۷۔

۱۷۔ نقشہ کشی کا نظریہ

یہاں لفظ نقشہ سے مراد کرہ پر کے نقطوں یا شکلوں کی کوئی مستوی
تعبیر ہے۔ سب سے پہلے ان طریقوں پر غور کرنا چاہئے جن کے ذریعہ کرہ پر
کے ایک نقطہ کے جواب میں نقشہ پر اس کا متناظر نقطہ مقرر ہو سکے۔ ہمیں یا تو ہندسی
عمل معلوم کرنا چاہئے جس کے ذریعہ نقشہ پر کا ہر نقطہ کرہ پر کے اس
نقطہ سے متعلق ہو جائے جسے وہ تعبیر کرتا ہے، یا دو ضابطے معلوم
ہونے چاہئیں جن سے یہ دریافت ہو سکے کہ اگر کرہ پر کے کسی نقطہ کے
محددے جائیں تو نقشہ پر متناظر نقطہ کے قائم محدود کیا ہیں۔ یہ دونوں
طریقے استعمال کئے جاتے ہیں۔ ہم ثانی الذکر سے ابتدا کریں گے۔

فرض کرو کہ ایک اساسی بڑے دائرہ کے حوالہ سے کرہ پر کے کسی
نقطہ کے عرض بلد اور طول بلد علی الترتیب یہ، لہ ہیں۔ فرض کرو کہ دو علی الترتیب
محوروں کے لحاظ سے ایک مستوی میں متناظر نقطہ کے محدود لا، ما ہیں۔

(۵۰) اگر بہ اور لہ دئے گئے ہوں تو سوال کو حل کرنے کے لیے ضروری ہے کہ لا اور ما کے لیے جملے حاصل ہو سکیں۔ اس کے عکس مسئلہ پر بھی غور کرنا ہے یعنی اگر لا اور ما دئے گئے ہوں تو یہ اور لہ معلوم کرنے کے لیے کوئی جملے ہونے چاہئیں۔ ان امور سے

لا = ف (بہ لہ) ، ما = ف (بہ لہ)
جیسے رشتوں کے وجود کا انہما ہوتا ہے جہاں ف، اور فم معلومہ تعال ہیں۔ یہ شاید نقشہ کشی کے فن کا عام ترین تخیل ہے۔

پھر حال تقاطعوں ف، اور فم پر بہت سے قیود عائد کرنے ہوں گے تاکہ وہ علی مقاصد پورے ہو سکیں جن کے لیے نقشے تیار کئے جاتے ہیں۔ مثلاً برطانیہ عظمیٰ کا کوئی نقشہ اسی وقت مفید ہوگا جبکہ اس پر مختلف قطعات کی وضع قطع حتی الامکان وہی ہو جو زمین کی کروئی سطح پر ان قطعات کی واقعی ہے۔ نیز نقشہ پر دکھائے ہوئے مختلف شہروں کے باہمی فاصلے، کم از کم تقریبی طور پر، ان حقیقی فاصلوں کے متناسب ہونے چاہئیں جو زمین کی سطح پر بڑے دائرہ کی قوس میں ناپے گئے ہوں۔ ہم اعتراف کرتے ہیں کہ مذکورہ بالا شرطیں کسی حال میں بھی ٹھیک ٹھیک پوری نہیں ہو سکتیں۔ یہ ممکن نہیں ہے کہ کوئی ایسا مستوی نقشہ تیار کیا جاسکے کہ کرہ پر کے نقطوں کے ہر زوج کے درمیانی فاصلے اپنے حقیقی تناسبوں میں اس نقشہ پر تعبیر ہو سکیں۔ لیکن بلاشبہ مختلف طریقوں سے یہ ممکن ہے کہ ایک ایسی مطابقت پیدا کی جائے کہ ہر کرؤی شکل جس کا ہر بعد کرہ کے قطر کے مقابلہ میں چھوٹا ہو نقشہ پر ایک شکل کے ذریعہ جو بڑی حد تک مشابہ ہو تعبیر ہو سکے۔

اگر کسی کرؤی مثلث کو نقشہ میں ایک مستوی مثلث کے ذریعہ تعبیر کرنا ہو تو یہ ظاہر ہے کہ ان کے متناظر زاوے مساوی نہیں ہو سکتے کیونکہ کرؤی مثلث کے مین زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰ سے بڑا ہوتا ہے اور اس لیے اس کے زاوے کسی مستوی مثلث کے زاوے نہیں ہو سکتے۔ لیکن اگر کرؤی مثلث بمقابلہ کرہ کی کل سطح کے چھوٹا ہو تو کرؤی اضافہ (۱ + ب ج - ۱۸۰)

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف لا ک}}{\text{جف ل}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف ما ک}}{\text{جف ل}}$$

اور ج کے محدود

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف لا ک}}{\text{جف ل}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف ما ک}}{\text{جف ل}}$$

ہیں۔ اگر مثلثات (ب ج اور ا ب ج) مشابہ ہوں اور ہر ایک مشترک جزو ضربی ہو جو ہ، ک، ا، ک پر منحصر نہ ہو تو

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف لا ک}}{\text{جف ل}} \right) + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف ما ک}}{\text{جف ل}} \right) = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف لا ک}}{\text{جف ل}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف ما ک}}{\text{جف ل}} \\ & \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف لا ک}}{\text{جف ل}} \right) + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف ما ک}}{\text{جف ل}} \right) = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف لا ک}}{\text{جف ل}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف ما ک}}{\text{جف ل}} \\ & \left\{ \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف لا ک}}{\text{جف ل}} \right\} + \left\{ \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف ما ک}}{\text{جف ل}} \right\} = \left\{ \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف لا ک}}{\text{جف ل}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف ما ک}}{\text{جف ل}} \right\} \end{aligned} \right.$$

(۱) یہ مساواتیں، ک، ا، ک کی تمام قیمتوں کے لیے پوری ہوں گی اگر حسب ذیل مساواتیں پوری ہوں

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} \times \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ل}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} \times \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ل}} = 0 \dots \dots (۲)$$

$$\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ل}} \right) + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ل}} \right) = \text{جم} = \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} \right) + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} \right) \dots \dots (۳)$$

اگر تعین ہم شکل ہے تو لا اور ما کو یہ شرطیں پوری کرنی چاہئیں جبکہ ان کو ہ اور ل کی رقوم میں بیان کیا گیا ہو۔

جب کوئی اہم شکل نقشہ تیار ہو جاتا ہے تو دوسرے متعدد نقشے حسب ذیل طریقہ پر حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

(۵۲)

فرض کرو کہ لطف متغیر لا + خ ما، غ سے تعبیر ہوتا ہے جہاں غ حسب معمول - اکا جذر المربع ہے - اگر ہم غ کا کوئی تغاقل لیں مثلاً غ یا جب غ یا لوک مس غ وغیرہ یا زیادہ عام صورت میں ف (غ) تو ہمیں ایک دوسرے لطف متغیر حاصل ہوتا ہے جسکو اس طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے :

$$ف (لا + خ ما) = ع + خ و$$

$$ف (لا - خ ما) = ع - خ و$$

اور نیز

ان دونوں مساواتوں کو یہ اور لہ کے لحاظ سے تفریق کریں تو

$$ف (لا + خ ما) = \left(\frac{جف لا}{جف ہ} + \frac{خ جف ما}{جف ہ} \right) = \frac{جف ع}{جف ہ} + \frac{خ جف و}{جف ہ}$$

$$ف (لا + خ ما) = \left(\frac{جف لا}{جف لہ} + \frac{خ جف ما}{جف لہ} \right) = \frac{جف ع}{جف لہ} + \frac{خ جف و}{جف لہ}$$

$$ف (لا - خ ما) = \left(\frac{جف لا}{جف ہ} - \frac{خ جف ما}{جف ہ} \right) = \frac{جف ع}{جف ہ} - \frac{خ جف و}{جف ہ}$$

$$ف (لا - خ ما) = \left(\frac{جف لا}{جف لہ} - \frac{خ جف ما}{جف لہ} \right) = \frac{جف ع}{جف لہ} - \frac{خ جف و}{جف لہ}$$

پہلی اور چوتھی مساواتوں کو ضرب دیکر اس میں دوسری اور تیسری کا حاصل ضرب جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ف (لا + خ ما) ف (لا - خ ما) = \left(\frac{جف لا}{جف ہ} \times \frac{جف لا}{جف ہ} + \frac{جف ما}{جف ہ} \times \frac{جف ما}{جف ہ} \right)$$

$$= \frac{جف ع}{جف ہ} \times \frac{جف ع}{جف ہ} + \frac{جف و}{جف ہ} \times \frac{جف و}{جف ہ}$$

چونکہ (لا، ما) ہم شکل تعبیر ہے اس لیے شرط (۲) کی بنا پر دائیں طرف کا جملہ صفر ہے - پس بائیں طرف کا جملہ بھی صفر ہونا چاہئے -

پھر دوسری اور آخری مساواتوں کو ضرب دینے سے

$$ف (لا + خ ما) ف (لا - خ ما) = \left[\left(\frac{جف لا}{جف لہ} \right) + \left(\frac{جف ما}{جف لہ} \right) \right]$$

$$\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لہ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف لہ}}\right)^2 =$$

اد پہلی اور تیسری مساواتوں کو ضرب دینے سے

$$\left[\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}}\right)^2\right] (\text{لا} - \text{خ ما}) =$$

$$\left(\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف بہ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف بہ}}\right)^2 =$$

اس لیے (۳) سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ

$$\left\{\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف بہ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف بہ}}\right)^2\right\} \text{جم بہ} = \left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لہ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف لہ}}\right)^2$$

اس طرح حسب ذیل اہم مسئلہ ثابت ہوتا ہے :-
اگر بہ لہ کے کوئی تفاعل لا، ما ہوں جن سے کرہ کی سطح کی اہم شکل تعبیر
ایک مستوی پر حاصل ہوتی ہے تو محدود ۶، و بھی جن کی تعریف شکل

$$\text{ف} (\text{لا} \pm \text{خ ما}) = ۶ \pm \text{خ و}$$

کی کسی مساوات سے ہوئی ہو بہ لہ کے ساتھ اہم شکل تناظر میں ہوں گے۔

مثال - اگر کرہ پر کے نقطوں کی اہم شکل تعبیر کے لیے لا اور ما نمونہ

لا = ۶ جم لہ، ما = ۶ جب لہ کے تفاعل ہوں جہاں ۶، بہ کا ایک تفاعل ہے تو
اہم شکل تعبیر کے لیے جو عام شرطیں اوپر بیان کی گئی ہیں ان سے ثابت کرو کہ

$$۶ = \text{مہ مس} \left(\frac{\pi}{m} \pm \frac{x}{p}\right)$$

لا اور ما کی بجائے ان کے چلے درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات

(۲) متشاکلاً پوری ہوتی ہے اور مساوات (۳) تخیل ہو کر

$$۶ = \text{جم بہ} \left(\frac{\text{جب ۶}}{\text{جف بہ}}\right)^2$$

ہو جاتی ہے۔

۱۹۔ ہم شکل تعبیر میں پیمانہ ۔

ہ کی ہندسی نسبت (نقشہ) قابل یادداشت ہے ۔ اس کو زیر بحث
 ظل کا پیمانہ کہتے ہیں کیونکہ مساواتوں (۱) میں سے پہلی مساوات سے
 جس میں $ھ$ کو $ا$ کا ۲ حصہ مل گیا ہے یہ ظاہر ہے کہ $ھ$ وہ جزو ضروری ہے
 جسے کرہ پر کی چھوٹی قوس پر لگانا ہو گا تاکہ ظل پر متناظر قوس کا ظل حاصل ہو
 خط کے لیے جو خط $ا$ کی ۲ حصے لیے ہم (چونکہ ظل ہم شکل ہے) کرہ پر نقطہ
 کے قریب کسی چھوٹی قوس کا مقابلہ ظل پر کی متناظر قوس کے ساتھ کر سکتے
 ہیں ۔ ہم سادہ ترین صورت کے طور پر طول $ھ$ کی ایک چھوٹی قوس لینے
 جو نقول (بہ کالم) اور (بہ $ھ$ کالم) کے درمیان ہے ۔ تب (۱) سے حاصل
 ہوتا ہے

$$ھ^۲ = \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}} \right)^۲ + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}} \right)^۲ = ھ^۲ ا^۲$$

اس سے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے :-
 اگر ایک نقطہ کے قائم مستوی محدود $ا$ ، $ما$ ہوں جو کسی ہم شکل نقشہ
 میں نصف قطر $ا$ کے کرہ پر کے نقطہ بہ $ا$ کو تعبیر کرتا ہے تو وہ پیمانہ
 یا جزو ضروری

$$\frac{۱}{ا} \left\{ \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}} \right)^۲ + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}} \right)^۲ \right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

ہے جسے کرہ پر کی ہر چھوٹی قوس پر لگانا ہو گا تاکہ اس سے ظل میں متناظر
 چھوٹا خط حاصل ہو ۔

۲۰۔ مرکیٹر (Mercator) کا ظل ۔

(۵۴)

اب ہم کرہ کی اس تعبیر پر غور کریں گے جو ”مرکیٹر کے ظل“ کے نام سے
 مشہور ہے اور جو جہاز رانی میں بہت مفید ہے ۔ اس ظل کی اہم خصوصیتیں

یہ ہیں:-
 (۱) نقشہ پر کے کسی نقطہ کا فاصلہ کرہ پر کے متناظر نقطہ کے طول بلد کے راست متناسب ہوتا ہے۔
 (۲) نقشہ پر کے کسی نقطہ کا معین کرہ پر کے متناظر نقطہ کے عرض بلد کا ایک تفاعل ہوتا ہے (لیکن طول بلد کا تفاعل نہیں ہوتا)۔
 (۳) نقشہ کرہ کی ہم شکل تعبیر ہوتا ہے۔
 پہلی شرط لا = ھ لہ سے بیان ہوتی ہے۔ دوسری شرط کو ظاہر کرنے کے لیے ہم ما = ف (بہ) رکھتے ہیں اور تیسری شرط کو پورا کرنے کے لیے ف کو ایک ایسا جملہ ہونا چاہئے کہ تعبیر ہم شکل ہو۔ اگر ما گو بہ کے صرف متناسب لیا جائے تو ظل ہم شکل نہیں ہوگا۔
 دفعہ (۱۸) کی بنیادی شرطیں (۲) اور (۳) پوری ہونی چاہئیں۔

چنانچہ

جف لا = جف لا = ھ لہ جف ما = ف (بہ) جف ما = جف بہ
 ان قیمتوں کو درج کرنے سے دفعہ (۱۸) کی مساوات (۲) متماثلاً صفر ہوتی ہے اور مساوات (۳) ہو جاتی ہے

$$ھ = جم بہ [ف (بہ)]$$

اور اس لیے $فر ف (بہ) = ھ قط بہ$

اگر ہم چاہیں کہ ما کی مثبت سمت، کرہ پر شمالی سمت کے جواب میں ہو تو اوپر کی علامت (یعنی +) لینی چاہئے۔ پس

$$ف (بہ) = ھ لوک مس (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) + مستقل$$

اس مستقل کو صفر کے مساوی بنایا جاسکتا ہے کیونکہ اس صورت میں نقشہ پر

خط استواء کے نقطوں کے لیے معین صفر ہو جاتے ہیں۔ اس طرح وہ اسی مسئلہ معلوم ہو جاتا ہے جس پر مرکبٹر کے ظل کا انحصار ہے، اس مسئلہ کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے :-
اگر کرّہ پر کسی نقطہ کے طول بلد اور عرض بلد لہ، بہ ہوں تو قائم

محدوں

$$\text{لا} = \text{لہ} ، \text{ما} = \text{لوک مس} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

سے ایک نقشہ بنایا جاسکتا ہے جو کرّہ کے ساتھ ہم شکل ہوگا۔
یہاں لہ کو نیم قطری زاویوں میں بیان کیا گیا ہے اور مستعمل لوکارتم (۵۵) نیپیری ہے۔ لیکن سہولت اس میں ہوگی کہ اوپر کی مساواتوں کو اس طور پر تحویل کیا جائے کہ لہ حسب معمول طول بلد کے درجوں میں بیان ہو جائے اور لوکارتم عام لوکارتموں میں مقیاس ۳۴۳۴۳ کی مدد سے تبدیل ہو جائیں۔ ان تبدیلیوں کو عمل میں لانے سے

$$\text{لا} + \frac{\pi^2}{360} = \text{لہ} ، \text{ما} = \frac{\text{لوک مس} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{34343}$$

اب لہ کی بجائے ایک نیا مستقل لہ ایسا رکھو کہ $360 = 360$ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{لہ} ، \text{ما} = 132 = \text{لوک مس} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \dots (۱)$$

جہاں لہ درجوں میں ہے اور معمولی لوکارتم استعمال کئے گئے ہیں۔
مثال ۱۔ ثابت کرو کہ مرکبٹر کے ظل

$$\text{لا} = \text{لہ} ، \text{ما} = \text{لوک مس} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

میں پیمانہ لہ قط بہ ۱ سے بیان ہوتا ہے۔
مثال ۲۔ اگر بحر اوقیانوس کے مرکبٹری نقشہ میں شمالی عرض بلد

۵۰ کا تواری خط استوا سے ۱۸۵ ملی میٹر پر ہو تو ۲۰ کے تواری کا فاصلہ کیا ہوتا چاہئے اور خط استوا پر ۵۰ کا طول کیا ہوگا۔

$$۱۸۵ = ۱۳۲ + ۵۰ \text{ (لوک مس)} \left(\frac{۲}{۲} + \frac{۱۱}{۲} \right)$$

اس لیے ۱۵۸۶ = ۵۰ اور نقشہ کی مسادات ہے

$$۲۴۵ = ۲۸۵ \text{ ملی میٹر} \times \text{لوک مس} \left(\frac{۲}{۲} + \frac{۱۱}{۲} \right)$$

اس میں یہ ۲۰ رکھنے سے ۲۸ = ۲۸۵ ملی میٹر حاصل ہوتا ہے۔
پھر چونکہ ۱۵۸۶ = ۵۰ اس لیے سوال کے دوسرے حصہ کا جواب
۹۳ = ۵۰ × ۱۵۸۶ ملی میٹر

۴۔ مثال ۳۔ مرکبیری نقشہ میں

$$۵ = ۱۰ \text{ (لوک مس)} \left(\frac{۲}{۲} + \frac{۱۱}{۲} \right)$$

$$۵ = ۱۰ \text{ (لوک مس)} \left(\frac{۲}{۲} - \frac{۱۱}{۲} \right) \text{ کی بجائے}$$

لینے سے کیا فرق پڑ جائے گا۔

مثال ۴۔ اگر عرض بلد بہ پچھوٹی ارضی قوس سے ہو اور اگر اس کا مرکبیری
ظل سن ہو تو ثابت کرو کہ یہ میں سے گزرتے ہوئے عرض بلد کے ارضی دائرہ
کے طول اور ظیل کے خط استوا کے طول میں نسبت سن ہے۔

مثال ۵۔ مرکبیری ظل میں ثابت کرو کہ بحری (Nautical)

میل (جو مساوی ہے عرض بلد) کا طول ایسے بدلتا ہے جیسے عرض بلد کا قاطع
(قط)۔

مثال ۶۔ ساحلی جہاز رانی میں مرکبیری نقشوں کا اعلیٰ فائدہ یہ
ہے کہ ملاح جب یہ معلوم کرنا چاہتا ہے کہ دو نقطوں (۱ اور ۲) میں کتنے بحری
میل (قوس کے منٹوں) کا فاصلہ ہے تو وہ اپنے گنیوں کے سروں کو نقشہ کے

اُن نقطوں پر رکھتا ہے جو (ا) اور ب کے متناظر ہیں اور پھر اُسے اٹھا کر (ا) اور ب کے عرض بلد کے قریب اُسی نقشہ کے حاشیہ پر عرض بلد کے لیے جو درجہ بندی ہے (۵۶) اُس پر منطبق کر کے مطلوبہ فصل معلوم کر لیتا ہے۔ اُس کے اس طریق پیمائش کا جو از ثابت کرو۔

نقشہ چونکہ ہم شکل ہے اور کرہ کے صرف ایک چھوٹے حصہ کو تعبیر کرتا ہے اس لیے ہم اُسے اس طور پر استعمال کر سکتے ہیں کہ گویا نقشہ پر کا ہر فاصلہ (بشمول عرض بلدوں کے پیمانہ کے) کرہ پر کے متناظر فاصلہ کے ٹھیک متناسب ہے۔ لیکن زمین کے مختلف حصوں کو تعبیر کرنے والے نقشوں پر عرض بلد کے منٹ طول میں بالعموم مختلف ہوں گے اگرچہ یہ نقشے ایک ہی مرکبٹری خلی کے مختلف حصے ہوں۔ اس لیے طاح کو چاہئے کہ وہ اپنا فاصلہ متعلقہ نقشہ سے اور تقریباً اُسی عرض بلد سے محسوب کرے جو اُن نقطوں کا ہے جن کا فاصلہ وہ پیمائش کر رہا ہے۔

مثال ۷۔ ثابت کرو کہ مرکبٹری نقشہ پر کیمبرج (عرض بلد ۵۲° ۱۲') کے گرد عرض بلد کے ایک درجہ کا طول اُس طول کا ۶.۲ گنا ہے جو خط استوا پر طول بلد کے ایک درجہ کا ہے۔

ضابطہ (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر خط استوا پر طول بلد کے ایک درجہ کا طول ۶۰ ہو تو عرض بلدوں ۶۰ اور ۶۲ کے تو ازیوں کا درمیانی فاصلہ مرکبٹری نقشہ پر یہ ہے

$$۱۳۲ = (لوکس (۱۲ + \frac{1}{2}) - لوکس (۱۲ + \frac{1}{2}))$$

اب یہ کی بجائے ۵۲ ۱۲ ۵۲ اور ۶۲ کی بجائے ۵۲ ۱۲ ۵۱ رکھنے

سے یہ جملہ ہو جاتا ہے ۲۶.۶۔

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ مرکبٹری نقشہ پر کسی بڑے دائرہ کی مرکز کی مسادات ہمیشہ شکل

$$۲ جب (۱ + \frac{1}{2}) = ک (۱ - \frac{1}{2})$$

کی ہوگی جہاں $\pi 2$ و نقشہ پر استوائی محیط کا طول ہے اور ج ک وہ مستقل
 میں جسے اس بڑے دائرہ کی تعین ہوتی ہے۔
مثال ۹۔ اگر یہ اتنا چھوٹا ہو کہ مس $\frac{1}{4}$ بہ کو نظر انداز کیا جاسکے
 تو ثابت کرو کہ مرکبیری نقشہ پر اور اس نقشہ پر (جو زمین کے مرکز سے اس لفاف
 استوانہ پر ظل لینے سے حاصل کیا گیا ہے جو زمین کو خط استواء کے پورے طول پر مس
 کرتا ہے) خط استواء سے ایک مقام کے فاصلوں کا فرق جس کا عرض بلد بہ ہے
 حسب ذیل ہوگا

$$\frac{2}{\pi} \text{ مس } \frac{1}{4} \text{ بہ } x \text{ زمین کا قطر}$$

استوانہ پر کرہ کی سطح کے کسی نقطہ کا ظل لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\pi 2 = 1 \text{ لہ } 240 \text{ ' } 6 = 1 \text{ مس بہ}$$

جہاں بہ اور لہ علی الترتیب اس نقطہ کے عرض بلد اور طول بلد میں اور لہ کرہ
 کا نصف قطر ہے۔

مرکبیری ظل میں

$$\pi 2 = 1 \text{ لہ } 240 \text{ ' } 6 = 1 \text{ لوک مس } (25 + \frac{1}{4} \text{ بہ})$$

اس لیے ان دو صورتوں میں خط استواء سے فاصلوں کا فرق ہے

$$1 \text{ (مس بہ - لوک } \frac{1 + \text{مس } \frac{1}{4} \text{ بہ}}{1 - \text{مس } \frac{1}{4} \text{ بہ}})$$

$$= 1 \text{ (مس } \frac{1}{4} \text{ بہ} + 2 \text{ مس } \frac{1}{4} \text{ بہ} + \dots - 2 \text{ مس } \frac{1}{4} \text{ بہ} - 2 \text{ مس } \frac{1}{4} \text{ بہ})$$

$$= \frac{2}{\pi} \text{ مس } \frac{1}{4} \text{ بہ } x 12$$

۲۱*۔ مساوی المیلان (Loxodrome) (۵۷)

اگر ہم زمین کو کرہ تسلیم کریں اور فرض کریں کہ ایک جہاز ہمیشہ ایک ہی
 سمت میں چلتا ہے یعنی ہمیشہ نصف النہار کے ساتھ ایک ہی زاویہ بناتا ہے

تو اس کے راستہ کو ہم مساوی المیلان (Loxodrome) کہینگے۔ انگریزی میں اس کا دوسرا نام (Rhumb-line) بھی ہے۔ اگر طول بلد لہ اور عرض بلد بہ ہو اور اگر طہ وہ زاویہ ہو جس پر یہ منحنی خط متواتر نصف النهاروں کو قطع کرتا ہے تو مساوی المیلان کی تفرقی مساوات ہوگی

$$\text{مس طہ} = \text{جم بہ فر لہ} \backslash \text{فر بہ}$$

اس لیے (منحل سے) لہ = مس طہ لوک $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$ + مستقل
اگر ہم لہ کی اس قیمت کو مرکبیری ظل

$$\text{لا} = \text{ھ لہ} ، \text{ما} = \text{ھ لوک مس} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

میں درج کریں تو حاصل ہوتا ہے

لا = ما مس طہ = مستقل
جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مساوی المیلان کا مرکبیری ظل ایک خط مستقیم ہے جو نصف النهاروں کے ظلوں کو اُسی زاویہ پر قطع کرتا ہے جس پر مساوی المیلان کرہ کی سطح پر نصف النهاروں کو قطع کرتا ہے۔ مساوی المیلان کے مرکبیری ظل کی یہ خاصیت جہاز رانی میں بہت زیادہ اہمیت رکھتی ہے کیونکہ جب طالع مرکبیری نقشہ پر کے دو نقطوں کو ایک خط مستقیم سے ملاتا ہے تو وہ مستقل زاویہ جس پر یہ خط نصف النهاروں کے ظلوں کو قطع کرتا ہے اُس سمت کا اظہار کرتا ہے جس میں اُسے ایک مقام سے دوسرے مقام تک جانا ہوگا۔

مثال ۱۔ اگر کسی کرہ کا نصف قطر ہو اور طہ وہ مستقل زاویہ ہو جس پر مساوی المیلان نصف النهاروں کو قطع کرتا ہے اور اگر γ وہ محور ہو جو مرکز کو شمالی قطب سے ملاتا ہے اور μ اور ν ما وہ نصف قطر ہوں جو خط استواء پر کے اُن نقطوں سے کھینچے گئے ہیں جن کے طول بلد علی الترتیب

۹۰ اور ۹۱ ہیں تو ثابت کرو کہ مساوی المیلان کی مساواتیں ہیں

ر مس طہ فری + ما فرلا - لا فرما = ۰

$$لا + ما + ی = ر$$

مثال ۲۔ اگر کرہ کا نصف قطر ہو اور طہ وہ مستقل زاویہ ہو جس پر نصف النهار مساوی المیلان کو قطع کرتے ہیں اور اگر مساوی المیلان کی اس قوس کا طول س ہو جس کے سروں کے عرض بلد ہم ، ہم ، ہیں تو ثابت کرو کہ

$$ر (ہم - ہم) = س جم طہ$$

مثال ۳۔ اگر زمین کو ایک کرہ نامیہا جائے جو چھوٹے خروج المرکز کے ایک قطع ناقص کو اس کے محور اصغر کے گرد گھمانے سے بنا ہے تو ثابت کرو کہ کسی نقطہ کے طول بلد لہ اور عرض بلد بہ میں رشتہ جبکہ یہ نقطہ اس مساوی المیلان پر واقع ہو جو نصف النهاروں کو مستقل زاویہ طہ پر قطع کرتا ہے حسب ذیل ہے

$$لہ = مس طہ \left\{ لوک مس \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - ز جب بہ \right\} + مستقل$$

اگر قطع ناقص میں اس نقطہ کا نصف قطر انحناء مسا ہو اور قطع ناقص اور محور اصغر کے درمیان عماد پر نقطہ سہ تو

$$سہ = \frac{1}{\sqrt{1 - ز جب بہ^2}} ، سہ = \frac{سہ}{1 - ز^2}$$

اور مساوی المیلان کی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{فر لہ}{فر بہ} = \frac{سہ مس طہ}{سہ مس طہ} = \frac{سہ مس طہ}{سہ مس طہ} - ز مس طہ جم طہ تقریباً$$

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ مرکزی نقشہ چس میں طول کی اکائی استوائی طول بلد کا آئیگی ہے عرض بلد بہ کے توازی کا متعین

$$۹۱۶ لوک مس \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - ۳۴۳۸ لہ جب بہ$$

ہوگا جہاں ز اُس قطع ناقص کا خروج الم مرکز ہے جو زمین کی نصف النہاری تراش لینے سے حاصل ہوتا ہے۔
مثال ۳ سے ہم دیکھتے ہیں کہ ظل کا نقطہ لا، ما جو نقطہ لہ، بہ کے جواب میں ہے حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے
لا = ھ لہ

$$ما = ھ \left\{ \text{لوک پوس} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - \text{ز}^2 \text{ جب بہ} \right\}$$

چونکہ لہ دائری ناپ میں ہے اس لیے ھ = ۳۴۳۸ اور ۳۴۳۸/۳۴۳۸ = ۱۰۰
= ۹۱۶ رکھنے سے لا، ھٹوں میں حاصل ہوتا ہے۔

۲۲۔ تنظیمی اظلال۔

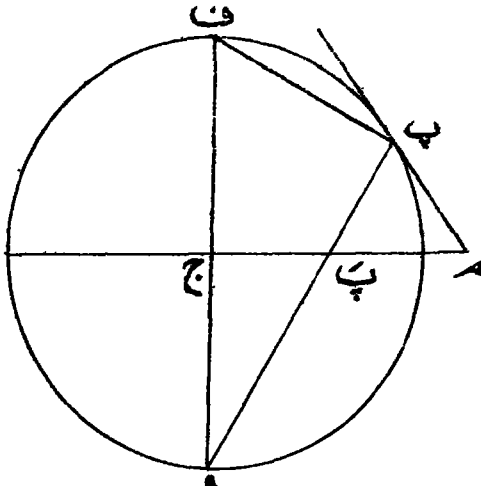
کرہ پر کے نقطوں کو ہم شکل ظل کے ذریعہ تعبیر کرنے کے اہم ترین طریقوں میں سے ایک طریقہ وہ ہے جو تنظیمی اظلال کے طور پر مشہور ہے۔ اس کی تفصیل حسب ذیل ہے۔

کرہ پر کوئی نقطہ و، ظل کے مبدا کے طور پر منتخب کیا جاتا ہے، اب ظل کا مستوی اُس بڑے دائرہ کا مستوی یا اس کے متوازی کوئی مستوی لیا جاتا ہے جس کا قطب و ہو۔ اگر کرہ پر کوئی دوسرا نقطہ پ ہو اور و پ، ظل کے مستوی کو پ میں قطع کرے تو ہم کہیں گے کہ پ کا تنظیمی ظل پ ہے۔ مستوی و پ پ ج کھینچو جہاں ج کرہ کا مرکز ہے۔ پ پر کا ماس مستوی، ظل کے مستوی کو ایک خط میں قطع کریگا جو ھ میں سے گذرتا ہے اور کاغذ کی سطح پر عمود ہے۔ فرض کرو کہ اس خط پر کوئی نقطہ ھ ہے۔ اب یہ ثابت کرنے کے لیے کہ ایسے ظل سے ہم شکل تعبیر حاصل ہوتی ہے ہم پ میں سے گذرنے والی کوئی قوس لیتے ہیں اور نصف النہار کے ساتھ اس کا جو میلان ہے اُس پر اور ظل میں اسکے متناظر جو زاویہ ہے اُس پر غور کرتے ہیں۔ دائرہ کی خاصیتوں سے ھ پ = ھ پ اور ایسے ھ پ = ھ پ

پس مثلثات $م پ م$ اور $م پ م$ مساوی ہیں اور اس لیے زاویہ $م پ م =$ زاویہ $م پ م$ ۔ لیکن زاویہ $م پ م$ کمرہ پر کے دو دائروں کا زاویہ تقاطع ہے اور زاویہ $م پ م$ ان کے ظلوں کا زاویہ تقاطع ہے۔ اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

تسطیعی ظل کے ہم شکل ہونے کا سادہ ترین ثبوت شاید یہ ہے: $پ$ پر کے کسی خطی عنصر (Line-element) اور $پ$ پر کے متناظر خطی عنصر میں نسبت

$\frac{و پ}{و پ}$ ہے، اس کو متشابه مثلثوں کے ذریعہ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جاسکتا ہے۔ اب یہ واقعہ کہ یہ نسبت خطی عنصر کی سمت پر منحصر نہیں ہے ثابت کرتا ہے کہ یہ تعبیر ہم شکل ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{و پ}{و پ}$ ہے۔



شکل (۱۹)

یہ ثابت کرنا آگاہی بخش ہو گا کہ تسطیعی ظل مرکبہ کی ظل سے کس طرح ذبیہ کے اصول کے ذریعہ ماخوذ کیا جاسکتا ہے یعنی اگر $و = ف + خ$ (لا + خ) تو

محدودوں ء، و سے ایک ایسی تعبیر ملتی ہے جو لا، ما سے حاصل ہونے والی تعبیر کے ہم شکل ہے۔
مرکز پٹری ظل میں

$$\text{لا} = \text{لہ}، \text{ما} = \text{لوک مس} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{خ} (\text{لا} + \text{خ} \text{ما})}{\text{لہ}} = \text{لوک مس} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + \text{خ لہ}$$

$$\text{اور اس لیے } \frac{\text{خ} (\text{لا} + \text{خ} \text{ما})}{\text{لہ}} = \text{اس} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \text{جم لہ} + \text{خ اس} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \text{جب لہ}$$

دائیں جانب کا رکن، لا + خ ما کا ایک تفاعل ہے اور اس لیے دفعہ ۱۸ کی (۶۰) رُت

$$= \text{اس} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \text{جم لہ اور و} = \text{اس} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \text{جب لہ}$$

بھی ایک ہم شکل تعبیر کے محدود ہیں، اور یہ دکھانا آسان ہے کہ یہ محدود بھی ظل کے ہیں کیونکہ اگر خط استواء کے مستوی کو ظل کا مستوی لیا جائے تو شکل ۱۹ میں

$$\text{زاویہ ف و پ} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \text{ ہے اور}$$

$$\text{ج پ} = \text{ج و مس} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right)$$

اگر پ کا طول بلد لہ ہو تو ج پ کے ظل، صفر طول بلد کی سمت میں اور اسکے علی القواطم سمت میں، علی الترتیب حسب ذیل ہیں

$$\text{ج و مس} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \text{جم لہ اور ج و مس} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \text{جب لہ}$$

ہم دفعہ ۱۹ کے ضابطوں سے کرہ پر کے نقطہ بہ، لہ پر تطبیعی ظل

کا پیمانہ متعین کر سکتے ہیں جبکہ ظل کی تعریف مساواتوں

$$\begin{aligned} \text{لا} &= \text{اجم لہ مس} \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{4} \right) = \text{ما} = \text{اجب لہ مس} \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{4} \right) \\ \text{کے ذریعہ کی گئی ہو جس میں بنیادی دائرہ کا صدر شطب راس کے طور پر لیا گیا} \\ \text{ہے (یعنی ظل کے مبداء کے طور پر) اور لا کرہ کا نصف قطر ہے۔ پس} \\ \frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}} &= \frac{\text{اجم لہ}}{\text{اجب بہ}} = \frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}} = \frac{\text{اجب لہ}}{\text{اجب بہ}} \end{aligned}$$

اور ایسے

$$\frac{1}{1 + \text{اجب بہ}} = \left\{ \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}} \right) + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}} \right) \right\} \frac{1}{1 + \text{اجب بہ}}$$

مثال ۱۔ کرہ پر کے نقطہ بہ لہ پر پیمائش کی قیمت تسلیمی ظل کے لیے معلوم کرو جبکہ بنیادی دائرہ کے اوپر راس نقطہ لہ = ۱۸۰° بہ = ۰° ہو اور ظل کی تعریف مساواتوں

$$\text{لا} = \frac{\text{اجم بہ جب لہ}}{\text{اجم بہ جم لہ}} = \text{ما} = \frac{\text{اجب بہ جب بہ}}{\text{اجم بہ جم لہ}}$$

کے ذریعہ کی گئی۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ زمین کے تسلیمی ظل میں زمین کے کسی نقطہ اور اس کے تحت قدمی نقطہ کے متناظر نقطے نقشہ کے مرکز کے ساتھ ہم خط ہونگے اور ایسے ہونگے کہ نقشہ کے مرکز سے ان کے فاصلوں کا حاصل ضرب مستقل ہوگا۔

مثال ۳۔ فرض کرو کہ کرہ پر کے نقطہ بہ لہ کے جواب میں تسلیمی ظل کا نقطہ لا + مفا + ما + مفا ہے۔ ثابت کرو کہ مفا لا + مفا ما مفا بہ چھوٹے ہوں تو

$$\text{مفا لا} = \text{ما مفا لہ} - \text{لا قطا بہ مفا بہ}$$

$$\text{مفا ما} = \text{لا مفا لہ} - \text{ما قطا بہ مفا بہ}$$

مثال ۴۔ دنیا کے نقشہ کو تین حصوں میں بنانا مقصود ہے

جن میں سے دو حائط قطبی ہوں تسطیحی ظل پر اور ایک 'اُستوا' ہو مرکزِ قطب پر۔
حائط قطبی نقشے ایسے ہونے چاہئیں کہ عرض بلد میں پیمانہ وہی ہو جو دوسرے
مرکزِ قطبی نقشے میں خط استوا پر ہے، نیز حدودی عرض بلد فہ پر پیمانہ تینوں نقشوں
کے لیے ایک ہی ہو۔ ثابت کرو کہ

۲ مس فہ (۱+ جب عم) = جب عم (۲+ جب عم)
اور یہ کہ عرض بلد فہ میں پیمانہ اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ خط استوا پر کے
پیمانہ کو

$$1 + \frac{\text{جب عم}^2}{(1 + \text{جب عم})^2}$$

سے ضرب دیا جائے۔

اُن پیمانوں سے جو دفعہ ۲۰ شمال ۱ اور دفعہ ۲۲ میں مرکزِ قطب اور تسطیحی
ظلوں کے لیے ثابت کئے گئے ہیں ہمیں علی الترتیب حاصل ہوتا ہے
 $\frac{1}{2} (1 + \text{جب عم}) = \frac{1}{2} (1 + \text{جب عم})$ ' $\frac{1}{2} (1 + \text{جب عم}) = \frac{1}{2} (1 + \text{جب عم})$
ان دو مساواتوں سے $\frac{1}{2} (1 + \text{جب عم})$ کو ساقط کرنے سے

$$\text{مس فہ} + \sqrt{1 + \text{مس فہ}^2} = 1 + \text{جب عم}$$

اس مساوات کو فہ کے لیے حل کر دو مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔
عرض بلد فہ پر کے پیمانہ کو خط استوا پر کے پیمانہ سے جو نسبت ہے
وہ قط فہ ہے اور

$$\text{قط فہ} + \sqrt{1 - \text{قط فہ}^2} = 1 + \text{جب عم}$$

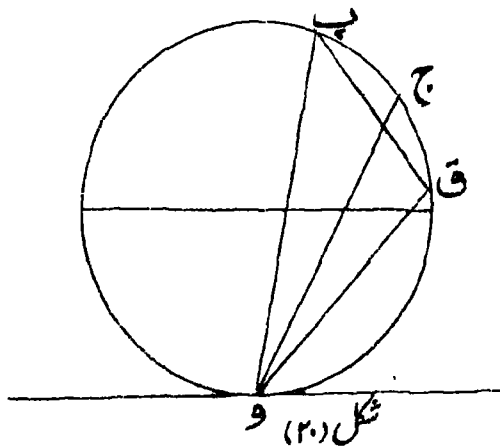
کو حل کرنے سے قط فہ شمال میں مندرجہ شرط کے مطابق حاصل ہوتا ہے۔

۲۳۔ کرہ پر کے کسی دائرہ کا تسطیحی ظل بھی ایک دائرہ ہوتا ہے۔
فرض کرو کہ کرہ پر دائرہ کا مرکز ج ہے۔ ظل کے مبداء کرہ کے مرکز

اور ج میں سے گزرتا ہوا ایک مستوی کھینچو۔
فرض کرو کہ اس مستوی اور دائرہ کے مستوی کا خط تقاطع پ ق
ہے۔ وہ مخروط جس کی چوٹی و ہے اور جو دائرہ کے محیط کے سب نقطوں میں
گزرتا ہے ضرور ہے کہ اس کا محور و ج ہو کیونکہ ج پ = ج ق اور
اس لیے زاویہ ج و پ = زاویہ ج و ق۔ یہ ہر اس مستوی کے لیے
درست ہونا چاہئے جو و ج میں سے گزرتا ہے اور یہ صرف اسی صورت
میں ممکن ہے جبکہ و ج 'مخروط کا محور ہو۔

ہر مخروط دائری تراش کے دو مستوی رکھتا ہے جو محور کے
ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں اور جن کا خط تقاطع محور پر عمود وار ہوتا
ہے۔ ج اور و پر کمرہ کے مماس مستوی، ج و کے ساتھ مساوی زاوے
بناتے ہیں اور ان کا خط تقاطع، ج و پر عمود ہے۔ لیکن ج پر کا مماس مستوی
ایک دائری تراش پ ق کے متوازی ہے اور اس لیے و پر کا مماس
مستوی دوسری دائری تراش کے متوازی ہونا چاہئے۔ اس طرح شیطی ہل
کی بنیادی خاصیت ثابت ہو جاتی ہے۔

(۶۲)



شکل (۲۰) و

چونکہ ایک مخروط، دائری تراشوں کے صرف دو نظامات رکھتا
ہے اس لیے سوائے ان مستویوں کے جو و پر کے مماس کے متوازی ہوں

کوئی دوسرے مستوی نہیں ہو سکتے جو تسطیحی ظل کی امتیازی خصوصیات رکھتے ہوں۔

یہ مسئلہ حسب ذیل طریقہ پر بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔
 کرہ کو دئے ہوئے دائرہ کے محیط پر مس کرنے والے مخروط کا ہر مکون دائرہ اس حاس پر عمود ہے جو نقطہ تماس پر کھینچا گیا ہو۔ نقطہ تماس پر مکون کے چھوٹے حصوں کے متعلق یہ تصور کیا جاسکتا ہے کہ وہ کرہ پر واقع ہیں۔ ظل میں یہ مخروط ایک نقطہ میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کی ایک مسلسل بنجاتا ہے اور چونکہ ظل میں زاوے وہی رہتے ہیں اس لیے دائرہ کا ظل ایک ایسا منحنی ہونا چاہئے جو ان تمام خطوط مستقیم کو علی القواہم قطع کرے یعنی دوسرا دائرہ۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ تسطیحی ظل میں کرہ پر کے کسی دائرہ کے مرکز کا ظل متناظر دائرہ کا مرکز ہوتا ہے اگر اصلی دائرہ کے قطراتے چھوٹے ہوں کہ انہیں خطوط مستقیم تصور کیا جاسکے۔

چونکہ زاوے ظل میں بھی وہی رہتے ہیں اس لیے اصلی دائرہ میں بنایا ہو کوئی قائم الزاویہ مثلث ظل میں بھی قائم الزاویہ مثلث رہتا ہے اور اس لیے دائرہ کے ہر قطر کا ظل متناظر دائرہ کا ایک قطر ہوتا ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ کرہ کی سطح پر کے کسی نقطہ کو ظل کا مبدأ قرار دیکر کرہ کا تسطیحی ظل لیا جائے تو نصف النہاروں کے کسی نظام کا ظل ہم محور دائروں کا ایک نظام ہوگا۔

(۶۳) مثال ۳۔ ثابت کرو کہ تسطیحی ظل میں کرہ پر کے ہم مرکز چھوٹے دائروں کے نظام کا ظل دائروں کا ایک نظام ہوتا ہے جن کے مرکز ہم خط ہوتے ہیں اور ان میں سے ہر دائرہ ہم محور دائروں کے وہی نظام کو علی القواہم قطع کرتا ہے۔ کیونکہ ہم مرکز دائروں کے مرکز ج میں سے گزرنے والے تمام بڑے دائروں کی تقلیب ہم محور دائروں کے ایک نظام میں ہوتی ہے اور چونکہ تقلیب میں زاوے برقرار رہتے ہیں اس لیے ہم مرکز دائروں کے مقلوب ان ہم محور دائروں کو

علی القوا تم قطع کرنے چاہئیں اور ان کے مرکز اس خط پر واقع ہونے چاہئیں جو برا
دائرہ وج کا مقنوب ہے جہاں و ظیل کا مرکز ہے۔

۲۴۔ تشطیبی غفلت کے لیے عام ضابطے۔

فرض کرو کہ شیطانی قتل کے میدانوں کے محدود ۲۰۰۰، یہ ہیں اور فرض کرو کہ کسی دوسرے نقطہ پیمانہ کے محدود ۱۰، یہ ہیں جہاں ان دونوں نقطوں کے محدود ایک ہی درجہ دائرہ کے دائرہ کے حوالے سے ہیں۔

فرض کرو کہ سس وہ بڑا درجہ دار دائرہ ہے جس کا شطب وہ ہے۔
فرض کرو کہ خط استقیم وہ پپا، سس کے مستوی کو پپا میں قطع
کرتا ہے۔ اس طرح پپا کا نصفی ظل پپا ہے اور ہم مان لیتے ہیں کہ مستوی
سس میں پپا کے محدودا، ما، یں۔ محور۔ لا کر وہ نصف قطر ہے
جو کرہ کے مرکز سے سس پر سس کے شعروں کی عقدہ تک کھینچا گیا ہے۔ محور
+ ما، سس پر کے نقطہ ۹۰ میں سے گزرتا ہے، اور یہ مان لیا گیا ہے
کہ یہ عقدہ، سس اور سس دونوں پر درجہ بندی کا مبداء ہے۔

اب ہمیں یہ، لہ کی رقوم میں لا اور مائے کے لیے مجھے معلوم کرنا ہے۔
 اب کرہ کے مرکز سے حسب ذیل تین قائم محور مان لیتے ہیں :-

محمود + لا ، نقطه به = ، له = . تک

محور + ما ، نقشہ بہ = لہ = ۹۰ تک

محور + ی ، نقطہ بہ = ۹۰° ، لہ غیر متعین ہے

ان محوروں کے حوالے سے و'پا'پ کے محمد علی الترتیب

حسب ذیل ہیں :-

ی	ما	لا	
و	- اجم به	.	
پ	ماجب به	لا	
پ	اجم به جب له	اجم به جم له	

اب چونکہ واپ اور پ ہم خط ہیں اس لیے
 $\frac{ا + جم بہ جم لہ - لا}{ا + جم بہ جب لہ - ما جب بہ} = \frac{ا + جم بہ جب لہ - ما جب بہ}{ا + جم بہ جب لہ - ما جب بہ}$
 جم بہ جم لہ جم بہ جب لہ + جم بہ جب بہ جب بہ - جب بہ
 ان مساواتوں کو لا اور ما کے لیے حل کرنے سے

$$لا = ا - \frac{جم بہ جم لہ}{ا - جب بہ جب بہ + جم بہ جب لہ} \dots (۱)$$

$$ما = ا - \frac{جم بہ جم بہ + جم بہ جب بہ جب لہ}{ا - جب بہ جب بہ + جم بہ جب لہ} \dots (۲)$$

(۶۳)

اگر و، س کا شطب ہو تو یہ = ۹۰° اور اس لیے

$$لا = ا - \frac{جم بہ جم لہ}{ا - جب بہ} ، ما = ا - \frac{جم بہ جب لہ}{ا - جب بہ}$$

اگر و، س کا ضد شطب ہو تو یہ = ۹۰° اور اس لیے

$$لا = ا - \frac{جم بہ جم لہ}{ا + جب بہ} ، ما = ا - \frac{جم بہ جب لہ}{ا + جب بہ}$$

اگر و، س پر واقع ہو تو یہ = ۰° اور اس لیے

$$لا = ا - \frac{جم بہ جم لہ}{ا + جم بہ جب لہ} ،$$

$$ما = ا - \frac{جم بہ جب لہ}{ا + جم بہ جب بہ}$$

ان ضابطوں میں ہم نے یہ مان لیا ہے کہ س پر درجہ بندی کا صفر
 س پر س کے صعودی عقدہ کے ساتھ منطبق ہوتا ہے۔ اگر درجہ بندی کا
 صفر کہیں اور ہو تو فرض کرو کہ اس صعودی عقدہ کا طول بلد ط ہے۔ تب
 ضابطوں (۱) اور (۲) میں لہ کی بجائے لہ - ط رکھنا چاہئے اور اس لیے

$$لا = ا - \frac{جم بہ جم (لہ - ط)}{ا - جب بہ جب بہ + جم بہ جب (لہ - ط)} \dots (۳)$$

ما = ۱ جب بہ جم بہ + جم بہ جب بہ جب (لہ - طا) (۳)

۱۔ جب بہ جب بہ + جم بہ جب بہ جب (لہ - طا)
ضابطوں (۱) اور (۲) یا (۳) اور (۴) کے ذریعہ ہم لا اور ما کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں جبکہ لہ اور بہ دے گئے ہوں اور اس طرح قائم محدودوں کے ذریعہ کرہ پر کسی شکل کا تسطیحی نقشہ بنایا جاسکتا ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ اگر تسطیحی ظل بنیادی دائرہ کے شطب سے ہو اور محور + لا 'نقطہ لہ = ۰'، یہ = ۰ سے کرہ کے مرکز تک اور محور + ما 'نقطہ لہ = ۹۰' یہ = ۰ سے کرہ کے مرکز تک ہو تو لا 'ما' اور لہ 'بہ' کے درمیان رشتے

ہیں۔ لا = اجم لہ مس (۲ + ۲) 'ما = اجم لہ جب (مس) (۲ + ۲)

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اگر تسطیحی ظل بنیادی دائرہ کے ضد شطب سے ہو اور محور + لا 'مرکز سے نقطہ لہ = ۰'، یہ = ۰ تک اور محور + ما 'مرکز سے نقطہ لہ = ۹۰' یہ = ۰ تک ہو تو لا 'ما' اور لہ 'بہ' کے درمیان رشتے

ہیں۔ لا = اجم لہ مس (۲ - ۲) 'ما = اجم لہ مس (۲ - ۲)

مثال ۲۔ اگر ظل کا مبدا، گرنیج پر ہو اور زمین کو کوئی مان لیا جائے تو بتاؤ کہ ضابطوں (۳) اور (۴) کے ذریعہ کس طرح اسٹریلیا کا تسطیحی نقشہ بنایا جاسکتا ہے۔

بہ کی بجائے گرنیج کا عرض بلد درج کرو اور یہ مان کر کہ طول بلد لہ گرنیج سے پیمائش کئے گئے ہیں طا = ۹۰ رکھو۔ اب اگر اسٹریلیا کے ساحل پر کسی نقطہ کے طول بلد اور عرض بلد لہ اور بہ ہوں تو (۳) اور (۴) سے متناظر مستوی قائم محدود لا اور ما متعین ہو جائیں گے اگر مستقل لا کو ایسی قیمت دی گئی ہو جو نقشہ کے مطلوبہ عرض و طول کے لحاظ سے سہولت بخش ہو۔

مثال ۴۔ اگر لہ 'بہ' متغیر محدود سمجھے جائیں لیکن اس رشتہ کے

(۶۵)

تحت کہ

۱) جم لہ جم بہ + ب جب لہ جم بہ + ج جب بہ =
 جہاں ۱، ب، ج مستقل ہیں تو (۳) اور (۴) سے ثابت کرو کہ وہ سب
 نقطے جو لا، ما سے تعبیر ہوتے ہیں ایک ہی دائرہ کے محیط پر واقع ہوں گے۔
 ۲۵۔ ایسا نقشہ بنانا جس میں کرہ پر کا ہر رقبہ 'نقشہ پرشای'
 رقبہ کے ذریعہ تعبیر ہو۔

اگر ایسے نقشہ پر تین نقطے (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما) ہوں تو وہ رقبہ
 جو ان کے اندر آتا ہے یہ ہے

۱) { لا (ما، ما) + لا (ما، ما) + لا (ما، ما) } (۱)
 فرض کرو کہ کرہ پر متناظر نقطے (بہ، لہ)، (بہ + ک، لہ) اور (بہ، لہ + ہ)
 ہیں جہاں ک اور ہ چھوٹی مقداریں ہیں۔ وہ رقبہ جو ان نقطوں سے
 کرہ پر حاصل ہوتا ہے ۱/۲ و ہ ک جم بہ ہے

نیز محدود لا، ما کے لیے جملے
 لا + جف لا ک، ما + جف ما ک
 جف بہ جف بہ

اور محدود لا، ما کے لیے جملے

لا + جف لا ہ، ما + جف ما ہ
 جف لہ جف لہ

حاصل ہوتے ہیں۔

پس (۱) میں انہیں درج کرنے سے مستوی میں رقبہ کے لیے حاصل

ہوتا ہے
 ۱/۲ { لا (جف ما، ک جف بہ) - (لا + جف لا ک) جف ما + (لا + جف لا ہ) جف ما ہ }
 ک جف بہ

= ۱/۲ { جف لا جف ما - جف لا جف ما ہ }
 جف لہ جف لہ

نقشہ کے لیے دو چلے جو حاصل ہوئے ہیں انہیں مساوی رکھنے اور
 دہرائی سے انعام ملے ہیں ایسے ہی چھوٹے رقبوں سے حاصل کی جاسکتی ہیں
 اور ان سے بڑا بنایا جاسکتا ہے کہ
 اگر ایسا کر کے مستوی نکل ایسا ہو کہ لڑہ پر کے نقطہ لہ، یہ کے
 متناظر نقطہ کے محمولہ اور ما، شرط

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}} \times \frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}} - \frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}} \times \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}} = \text{راجم بہ} \dots (۲)$$

کو پرا لیں تو کرہ پر کا کوئی رقبہ مساوی رقبہ میں مستوی پر مظلل ہوگا۔

(۶۶)

تیسرے باب پر متفرق مثالیں

مثال ۱۔ اگر ایک کرہ پر کے نقلوں کو کرہ کے مرکز سے ایک مستوی پر منظر کیا جائے (Gnomonic Projection) تو دونوں کے اصولوں کے ذریعہ اس امر کا امتحان کرو کہ آیا یہ ظل ہم شکل ہے۔

مثال ۲۔ اگر کرہ کے ایک بڑے دائرہ پر موقوفہ کسی نقطہ کا طول بلد اور عرض بلد (ل، فہ) ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس فہ} = \text{ا جم ل} + \text{ب جب ل}$$

جہاں ا اور ب مستقل ہیں۔ پھر اگر ہم رکھیں

$$(۱) \text{ لا} = \text{م فہ جم ل}، \text{ ما} = \text{م فہ جب ل}$$

$$(۲) \text{ لا} = \text{مس فہ قطل}، \text{ ما} = \text{مس ل}$$

یا تو لا اور ما میں (یا لا اور ما میں) ایک خطی رشتہ حاصل ہوتا ہے۔ ایسے لا اور ما (یا لا اور ما) کو کارٹینری محدودوں کے طور پر تقسیم کیا جائے تو تمام بڑے دائرے خطوط مستقیم ہوں گے۔

بتاؤ کہ کرہ کا منطری ظل مستوی پر لینے سے یہ دو نقشے کس طرح تیار کئے جاسکتے ہیں۔

مثال ۳۔ زمین کی سطح پر ایک دائرہ کا زاوی نصف قطر سراسرے اور اس کا مرکز ا عرض بلد یہ میں واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اگر شمالی قطب کو ظل کا مبدا لیکر خط استواء کے مستوی پر زمین کا طبیعی ظل حاصل کیا جائے تو اس ظل میں مذکورہ بالا دائرہ ایک دائرہ (نصف قطر کا) سے تعبیر ہوگا جس کے مرکز کا فاصلہ اس نقطہ سے جو ا کو تعبیر کرتا ہے حسب ذیل ہوگا

$$\text{مس} \frac{۱}{۲} \text{ مس} \left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} \right)$$

مثال ۴۔ کرہ کے اس ظل میں جو گاؤس سے منسوب ہے نصف الہام

ایک نقطہ میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم سے تعبیر ہوتے ہیں۔ ایسے کسی دو خطوں کا درمیانی زاویہ ۹۰° ہے جہاں لہ، متناظر نصف النہاروں کے طول بلدوں کا فرق ہے۔ عرض بلد کے توازی دائری قوسوں سے تعبیر ہوتے ہیں جن کے مرکز وہ ہیں۔ اگر یہ تعبیر ہم شکل ہو تو ثابت کرو کہ اس قوس کا نصف قطر جو عرض التمام کے جواب میں ہے ک (سس ۱/۲) ہونا چاہئے جہاں ک مستقل ہے۔

ہیں ماہل ہونا چاہئے لا = جم (لال) ، ما = جب (لا) جہاں ۶، عرض بلد کا ایک تفاعل ہے۔ دفعہ ۱۸ کی مساوات (۳) میں درج کرنے سے ماہل ہوتا ہے

$$۹۰ = جم \text{ بہ } \left(\frac{جب}{جب \text{ بہ }} \right)$$

مثال ۵۔ اگر

$$لا = ۹۰ - \frac{۱۱}{۲} \text{ لہ } ، ما = ۹۰ \text{ لوک سس } \left(\frac{۱۱}{۲} + \frac{۱۱}{۲} \right)$$

$$\text{توازیات کرو کہ } سس = \frac{لا + خ ما}{۲} = ۹۰ + خ و$$

$$\text{جہاں } ۹۰ = جم \text{ بہ جم لہ } \text{ (۱ + جم بہ جب لہ) } ، جب بہ (۱ + جم بہ جب لہ)$$

اور اس لیے بتاؤ کہ ۶، و ایسے محدود ہیں کہ ان سے ایک ہم شکل تعبیر حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۶۔ اگر کرہ پر کا نقطہ بہ، لہ ایک مستوی پر کے اس نقطہ سے تعبیر ہو جس کے محدود (۶۴)

$$لا = \frac{جم \text{ بہ جم لہ}}{۱ + جم \text{ بہ جب لہ}} ، ما = \frac{جب بہ}{۱ + جم \text{ بہ جب لہ}}$$

ہیں توازیات کرو کہ کرہ پر کا ایک دائرہ جس کا نصف قطر س ہے اور مرکز بہ، لہ ہے مستوی پر ایک دائرہ سے تعبیر ہو گا جس کا نصف قطر جب س (جم س + جم بہ جب لہ) ہو گا اور جس کے مرکز کے محدود جم بہ جم لہ (جم س + جم بہ جب لہ) اور جب بہ (جم س)

۴۔ جم یہ جب لہ (ہو گئے۔

مساوات جم م = جب یہ جب یہ ۴ جم یہ جم (لہ - لہ) کی مدد سے
یہ اور لہ کو سا قسط کرو۔

مثال ۲۔ شمالی نصف کرہ کا ایک نقشہ اس طرح بنایا گیا ہے کہ
عرض بلد کے توازی ہم مرکز دائرے ہیں اور نصف النہار ان دائروں کے نصف
قطر ہیں اور یہ کہ زمین پر کے مساوی رقبے نقشہ پر مساوی رقبوں سے تعبیر ہوتے
ہیں۔ اس منحنی کی مساوات معلوم کرو اور اسے مرتسم کرو جو نقشہ پر ایک
مساوی المیلاں کو تعبیر کرتا ہے۔

سوال کی شرطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = م جم لہ \quad م = م جب لہ$$

جہاں م یہ کا تفاعل ہے۔

چونکہ رقبے وہی رہتے ہیں اس لیے ان قیمتوں کو دفعہ ۲۵ میں مندرجہ شرط
میں درج کرتے ہیں اور معلوم کرتے ہیں کہ

$$م جب لہ = م جب لہ$$

جہاں م ایک مستقل ہے جو کرہ پر کے اور قطب پر کے رقبوں کی نسبت کے متغیر
مربوط ہے۔

مکمل کرنے اور امتیازی مستقل کو اس شرط سے معلوم کر کے

$$م = جبکہ یہ = ۹۰ ہمیں حاصل ہوتا ہے$$

$$م = ۲ (۱ - جب یہ)$$

$$م = ۲ جب (۱ - \frac{۱}{۴})$$

اس مساوی المیلاں خط کا قطب جو نصف النہاروں کو زاویہ ص (دفعہ ۲۱) پر قطع
کرتا ہے حسب ذیل مساواتوں

$$لہ = مس ص لوک مس (۱ - \frac{۱}{۴})$$

$$\text{مس لہ} = \frac{1}{11}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2 \text{ جب } \left(\frac{2}{3} - \frac{11}{11} \right)$$

کے درمیان یہ اور لہ کو سا قاط کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور یہ حاصل اسقاط قطبی محدودوں میں

$$r^2 = (1 + \frac{2}{11} \text{ طہ مم صہ})^2$$

ہے۔

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ عرض بلد کے توازی پر سفر کرنے کی بجائے ایک بڑے دائرہ پر سفر کرنے سے وہ بڑے سے بڑا فاصلہ جس کی بچت کی جاسکتی ہے یہ ہے

$$[2 \text{ جب } \frac{1}{11} + \sqrt{11 - 12}]$$

جہاں ۱ زمین کا نصف قطر ہے۔

یہ واضح ہے کہ مفروضہ صورت میں آمد و رفت کے بندرگاہوں کے طول بلدوں کے درمیان فرق ۱۸۰ ہونا چاہئے تاکہ ان کو ملانے والا بڑا دائرہ قطب میں سے گذرے۔ اگر عرض بلد نہ ہو تو ان دو سفروں میں مسافت کا فرق ۱ (۱۱ جم نہ ۱۱ + ۲ نہ) ہے اور یہ اعظم قیمت اختیار کرے گا جبکہ جب نہ = $\frac{1}{11}$ ۔

مثال ۹۔ ثابت کرو کہ ایک نصف النہار سے ایک مقام تک جو دوسرے نصف النہار پر اسی عرض بلد میں ہے سفر کرنے میں مشرق اور مغرب کی سمت میں سفر کرنے کی بجائے ایک بڑے دائرہ پر سفر کرنے سے فاصلہ میں جو بچت ہوتی ہے وہ عرض بلد

$$\text{جم } (1 - \text{جب } 1 \text{ لہ جب } 1 \text{ لہ})$$

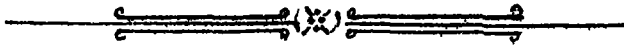
کے لیے اعظم ہے جہاں لہ ان دو نصف النہاروں کے طول بلد کا فرق ہے۔

مثال ۱۰۔ ایک جہاز کا چھوٹے سے چھوٹا راستہ معلوم کرو جسے ایک

نقطہ سے دوسرے نقطہ تک ایک خاص عرض بلد کو عبور کئے بغیر جانا ہے یہ فرض کر لیا جائے کہ بڑے دائرہ کار راستہ اس عرض بلد کو قطع کرتا ہے۔

مثال ۱۱۔ کیپ کلیر عرض بلد $51^{\circ} 27'$ نش اور طول بلد $9^{\circ} 29'$ ص میں ہے۔ کیپ ریس عرض بلد $46^{\circ} 40'$ نش اور طول بلد $3^{\circ} 58'$ ص میں ہے۔ اس امر کی تصدیق کرو کہ ان کے درمیان بڑے دائرہ کار راستہ سفر کے لیے اقیاناً کرنے میں اس بات کی ضرورت ہے کہ کیپ کلیر سے اوپر $\frac{1}{4}$ شمالی راستہ اختیار کیا جائے یہ نسبت اس سیدھے راستہ کے جو مرکز کی نقشہ سے معلوم ہوتا ہے۔ نیز یہ ثابت کرو کہ اول الذکر راستہ دوسرے راستہ کی یہ نسبت 28 میل چھوٹا ہے۔

مثال ۱۲۔ اگر کرہ کا نصف قطر 1 اور ظل کے مبداء سے سطحی ظل کے مستوی کا فاصلہ m ہو، پ اور پ متناظر نقطوں کا ایک زوج ہوں اور ظل کے مبداء میں سے گزرنے والے قطر سے پ کا فاصلہ رہو تو ثابت کرو کہ پ کے قریب ایک چھوٹی قوس کا ظل پ کے قریب ایک چھوٹی قوس ہوگا اور اس قوس کا طول $m(m' + r)$ ہوگا۔



چوتھا باب
گرہ سماوی

Celestial
Spire

(79)

صفحه

107

11.

111

115

119

۱۱۹
میں اور مشاہد کا

وفا

۲۶ - کربہ سٹاپی

۲۷ - اقبی سماوی

۲۸ - یومی حرکت

۲۹۔ نصف النہال اور اول السمیت

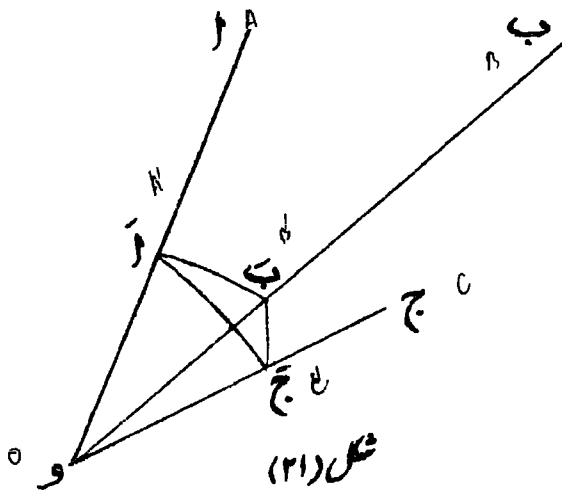
۳۔ ارتقاغ اور السمیت

۲۶ - کره سماوی

فرض کرو کہ تین ستارے 'ا'، 'ب'، 'ج' (شکل ۲۱) ہیں اور مشاہدہ کا

محل و ہے۔

perfection



شکل (۲۱)

فرض کرو کہ مرکز و اور کوئی نصف قطر و ا لیکر ایک کرہ بنایا گیا ہے جو
و ا، و ب، و ج کو علی الترتیب ا، ب، ج پر قطع کرتا ہے اور اس طرح (۷۰)
کروی مثلث ا ب ج حاصل ہوتا ہے۔

زاویہ ا و ب وہ زاویہ ہے جو ستارے ا اور ب، مشاہد کی
آنکھ پر پڑتا ہے۔ اس کو آسانی کے ساتھ ا ب کے ذریعہ ناپا جاسکتا ہے
جو مثلث ا ب ج کا ایک ضلع ہے اسی طرح ب ج اور ج ا سے
ب و ج اور ج و ا کے ناپ حاصل ہوتے ہیں۔

پس دو ستاروں کا ظاہری فاصلہ اس زاویہ سے ناپا جاتا ہے جو ان
ستاروں کے محاذی مشاہد کی آنکھ پر پڑتا ہے۔ مثلاً ا اور ج کا ظاہری فاصلہ
زاویہ ا و ج کے ذریعہ یعنی ا ج کے ذریعے ناپا جاتا ہے۔ دو ستاروں
کے باہمی فاصلہ سے جو فی الحقیقت صرف ایک زاویہ ہے اس امر کا کوئی
ایکا نہیں ہوتا کہ ان کے درمیان اصلی فاصلہ کیا ہے، یہ فاصلہ بلاشبہ ایک
خطی مقدار ہے۔ اس اصلی فاصلہ کو معلوم کرنے کے لیے مشاہد کے مقام
سے ان ستاروں کے خطی فاصلے معلوم ہونے چاہئیں۔ ثریا (Pleiades)

کے ستارے دب اکبر (Ursa Major) کے ستاروں کی بہ نسبت باہم بہت
نزدیک نظر آتے ہیں لیکن اس سے یہ نتیجہ برآمد ہونا ضروری نہیں ہے کہ ثریا
(Pleiades) کے ستارے باہم ایک دوسرے کے قریب واقع ہیں۔

اجسام سماوی کے اضافی محلوں کی فلکی پیمائشوں سے صرف ظاہری
فاصلوں کی تعیین ہوتی ہے اور یہ فاصلے جیسا کہ ہم اوپر دیکھ چکے ہیں و ج
قوسیں ہیں جو و کے گرد گھومنے ہوئے کرہ پر واقع ہیں۔ اس لیے فلکی پیمائشوں
کا علم ہندسہ، کرہ کا علم ہندسہ ہے۔

زیر بحث کرہ سے اجسام سماوی کے ظاہری فاصلے بعینہ اس طرح
معلوم ہوئے ہیں جیسے وہ آسمان پر دکھائی دیتے ہیں۔ اس لیے اس کرہ کو
کرہ سماوی کہا جاتا ہے۔ اس کے نصف قطر کا طول غیر اہم ہے اور مختلف
سماوی کروں کا مقابلہ کرنے میں ہم ان کے نصف قطروں کو سماوی مان سکتے ہیں۔

کسی کروہ سماوی کا مرکز مشاہد کا مقام ہوتا ہے اور ظاہر ہے کہ ہر مقام کے لیے ایک مختلف کروہ سماوی ہوگا۔ اب ہم اس امر پر غور کریں گے کہ مختلف مقامات پر کے سماوی کروے ایک دوسرے سے کس حد تک مختلف ہوتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ مشاہد ستارہ سماک راع (Arcturus) پر واقع ہے تو اس کا بنایا ہو کرہ سماوی وہی نہیں ہوگا جو زمین کے کسی مقام پر ایک دوسرے مشاہد بناتا ہے۔ ان دو صورتوں میں ستاروں کے کسی زوج کے باہمی ظاہری فاصلے بالعموم بالکل مختلف ہوں گے۔

مشاہدوں کے مقام یعنی سماوی کرووں کے مرکز جتنے قریب واقع ہوں گے سماوی کروے زیادہ تر ایک دوسرے کے مشابہ ہوتے جائیں گے۔ ثابت ستاروں (انہیں بالعموم ایسا ہی کہا جاتا ہے) کا جہاں تک تعلق ہے اُس حد تک یہ کہنا صحیح ہے کہ وہ سماوی کروے جو سطح زمین پر کے تمام نقطوں کے لیے بنائے جائیں عملاً مماثل ہوتے ہیں۔ اس کا باعث یہ ہے کہ زمین سے ان ثابت ستاروں کے فاصلے اس قدر بڑے ہیں کہ زمین کا قطر ان کے مقابلہ میں بالکل ناقابل قدر ہے۔ مثلاً ہم یہ بیان کر سکتے ہیں کہ اگر مشاہد کو زمین کے کسی مقام سے اس کے تحت قدمی مقام پر منتقل کیا جائے تو دو ستاروں کے باہمی فاصلہ کا تغیر کسی صورت میں بھی قوس کے ایک ثانیہ کے ۱۶۰۰۰ویں حصے سے متجاوز نہیں ہو سکتا جہاں تک کہ ہم فی الحال کو کبھی فاصلوں سے واقف ہیں۔ ہمارے بیہیسی آلات اس قدر نازک نہیں ہیں کہ اس تغیر کو ناپ سکیں، اس کا ہزار گنا زاویہ لینے پر ہمارے آلات میں اس زاویہ کی کوئی قدر معلوم ہوتی ہے۔

سورج کے گرد زمین کی سالانہ حرکت کی باعث کسی ارضی مشاہد کا مقام تقریباً ایک دائری راستہ جس کا اوسط نصف قطر ۹۲۹۰۰۰۰ میل ہے حرکت کرتا ہے۔ اس لیے کوئی ارضی مشاہد چھ مہینوں کے وقفہ میں ایک ایسے فاصلہ پر منتقل ہو جاتا ہے جو اس مقدار کا تقریباً دو چندان ہے۔ لیکن ان حالات میں بھی

بیشتر ستاروں کے ظاہری فاصلے بغیر کسی قابل قدر تغیر کے برقرار رہتے ہیں اور جہاں تک ہمارے علم کا تعلق ہے کسی صورت میں بھی ایسے انتقال کی باعث بڑے سے بڑا تغیر ۵۰۵ء سے تجاوز نہیں ہوتا۔ (دیکھو پندرہواں باب)

اوپر جو کچھ بھی بیان کیا گیا ہے وہ صرف ثابت ستاروں کے متعلق ہے۔ ہم بارہویں باب میں یہ دیکھیں گے کہ کرہ سماوی پر سورج اور سیاروں کے ظاہری مقامات کچھ حد تک اور چاند کا ظاہری مقام بڑی حد تک اُس محل سے متاثر ہوتے ہیں جو زمین کی سطح پر مشاہد اختیار کرتا ہے۔

ہم ان ذاتی حرکتوں پر اس وقت غور نہیں کر رہے ہیں جو بعض اجسام سماوی کی ہوتی ہیں۔ یہ حرکتیں بلاشبہ ہر صد گاہ کے کرہ سماوی پر ان اجسام کے محلوں کو متاثر کرتی ہیں۔

اگر ہم سماوی کرؤں پر صرف ان اجسام سماوی کو مرسم کریں جیسے کہ بیشتر ثابت ستارے ہیں جو اس قدر دور ہیں کہ وہ ظاہری فاصلے جو انہیں ایک دوسرے سے جدا کرتے ہیں نظام شمسی کے تمام حصوں سے قریب قریب وہی رہتے ہیں تو ہم سماوی کرؤں کے متعلق حسب ذیل بیان دے سکتے ہیں جس میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ان تمام کرؤں کے نصف قطر مساوی ہیں۔

نظام شمسی میں ہر مقام کے جواب میں ایک کرہ سماوی ہوگا جس کا مرکز یہ مقام ہوگا۔

نظام شمسی میں ہر کرہ سماوی ہر دوسرے کرہ سماوی کے مانند ہوتا ہے نہ صرف نصف قطر کے لحاظ سے بلکہ ان ستاروں کے لحاظ سے بھی جو اس پر نشان زدہ ہوں۔

کسی دئے ہوئے لمحہ پر سماوی کرے سب کے سب متشابہا واقع ہوتے ہیں یعنی ایک کرہ کا کوئی نصف قطر جو کسی مخصوص ستارے تک

کھینچا گیا ہو ہر دوسرے کرہ کے متناظر نصف قطر کے مساوی ہوتا ہے۔ اکثر اس میں سہولت ہے کہ کرہ سماوی پر اس طرح بحث کی جائے کہ گویا اس کا مرکز زمین کے مرکز پر منطبق ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ محدود فاصلے پر کے کسی نقطہ کو کرہ سماوی کا مرکز خیال کیا جا سکتا ہے اگر کرہ کا نصف قطر لا انتہا بڑا ہو۔

فرض کرو کہ کرہ سماوی کا مرکز O ہے اور فرض کرو کہ P سے محدود فاصلے پر کوئی نقطہ L ہے اور کرہ کی سطح پر کوئی نقطہ S ہے تو

$$لا س = و س - ۲ و س \times و لا جم لا و س + و لا^۲$$

$$= و س^۲ (۱ - ۲ \frac{و لا}{و س} جم لا و س + \frac{و لا^۲}{و س^۲})$$

اب چونکہ $و لا$ محدود ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے $و س$ لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے $\frac{و لا}{و س}$ صفر کے قریب آتا ہے اس لیے انتہا لینے سے $\frac{لا س}{و س}$

$= ۱$ ۔ لیکن چونکہ $و س$ کرہ پر کے تمام نقطوں S کے لیے مستقل ہے اس لیے $لا س$ بھی مستقل ہونا چاہئے یعنی $لا$ کو کرہ کا مرکز متصور کیا جا سکتا ہے اور اس سے کوئی قابل قدر خطا واقع نہیں ہوتی۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ $لا س$ اور $و س$ کی سمتیں انتہا میں منطبق ہونے کا میلان رکھتی ہیں۔

۲۔ افق سماوی

فرض کرو کہ زمین کی سطح پر مشاہد کا مقام P ہے اور فرض کرو کہ اس کا کرہ سماوی کھینچ لیا گیا ہے جس کا نصف قطر زمین کے نصف قطر کے مقابلہ میں بہت زیادہ بڑا ہے۔ اب اگر نقطہ P پر زمین کا محاس مستوی کھینچا جائے تو یہ مستوی اس کرہ سماوی کو ایک بڑے دائرہ میں قطع کرے گا، اس بڑے دائرہ نوپ کا افق سماوی کہا جاتا ہے۔

کسی مقام پر افق کا مستوی، اس مانع کی سطح کا مستوی بھی ہے جو ایک کھلے برتن میں اس مقام پر سکون کی حالت میں ہو۔ یہ مستوی، ارضی کشش کی سمت پر عمود ہوتا ہے اور اس لیے زمین کی سطح کے کسی مقام پر خط شاقول کی سمت اس مستوی پر عمود ہوتی ہے جو پ کے افق کو تعبیر کرتا ہے۔ اگر اس خط شاقول کو ہر دو طرف خارج کیا جائے تو وہ 'کرہ سماوی' کو دو نقطوں میں قطع کرے گا، یہ نقطے علم ہیئت کرؤی میں بڑی اہمیت رکھتے ہیں۔ نقطہ سہا جو اس طرح ٹھیک سر کے اوپر حاصل ہو پ کا راس کہلاتا ہے۔ دوسرا نقطہ ف قدیم کہلاتا ہے جو کرہ سماوی پر اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ ہم خط شاقول کی سمت کو ٹھیک قدموں کی سمت میں خارج کریں، یہ سمت کرہ سماوی کو اس نقطہ پر قطع کرے گی۔

۲۸۔ یومی حرکت۔

زمین کی روزانہ گردش، اپنے محور کے گرد، ۲۳ گھنٹے ۵۶ منٹ ۴۰ ثانیوں کے تقریبی وقفہ میں مکمل ہوتی ہے اور اسے بالعموم شمسی دن کہا جاتا ہے (دیکھو دفعہ ۳۳)۔ زمین کی اس روزانہ گردش کی باعث کرہ سماوی کی ظاہری گردش مخالف سمت میں یعنی مشرق سے مغرب کی طرف حاصل ہوتی ہے، یہ ظاہری گردش یومی حرکت کے طور پر مشہور ہے۔ زمین کی محوری گردش کو ثابت کرنے کا راست ترین طریقہ فو کو (Foucault) کے رقاص کے تجربہ سے بہم پہنچتا ہے۔ اگر ہم زمین کو ایک کامل کرہ تسلیم کریں اور اس کا مرکز و ہو تو فو کو کے رقاص کے اصول حسب ذیل ہیں۔

فرض کرو کہ مقام پ پر مشاہد کا شمالی عرض بلد فہ ہے اور زمین کی زاویائی رفتار اپنے محور کے گرد سہ ہے۔ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ سہ کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا گیا ہے ایک جزو تکلیلی، و پ کے گرد، سہ جب فہ ہے اور دوسرا، و ق کے گرد، سہ جم فہ ہے جہاں ق وہ نقطہ ہے

جس کا جنوبی عرض بلد ۹۰° - فہ ہے اور جو پ کے نصف النہار پر واقع ہے۔ جہاں تک کہ پ اور اس کے نزدیک کے مقامات کا تعلق ہے اس آخری گردش کا اثر ان مقامات پر صرف انتہائی ہے اور اس لیے موجودہ مقصد کے لحاظ سے یہ جزو تحلیل نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ دوسرے جزو تحلیل کا یہ اثر ہوگا کہ اس کی باعث پ پر افق کا مستوی، و پ کے گرد زواویں رفتار سے جب فہ کے ساتھ گردش کرے گا۔ اس لیے اگر پ پر کا کوئی انتصابی مستوی و پ کے گرد گردش میں کوئی حصہ نہ لے یعنی وہ ساکن تصور کیا جائے تو اس کے ساتھ کوئی اور انتصابی مستوی جو و پ کے گرد گردش میں حصہ لیتا ہے ایسا زاویہ بنائے گا جو رفتار سے جب فہ کے ساتھ بڑھتا رہے گا۔ نو کو رفاص وہ ذرائع بہم پہنچاتا ہے جو اس تجربہ کی تصدیق کرتے ہیں۔ عملی تفصیلات میں گئے بغیر اس تجربہ کی لازمی خصوصیت حسب ذیل ہے:-

ایک ثابت نقطہ سے لمبے تار کے ذریعہ ایک بھاری وزن لٹکایا جاتا ہے پھر اس وزن کو ایک طرف ہٹا کر احتیاط کے ساتھ چھوڑ دیا جاتا ہے تو یہ وزن آہستہ آہستہ آگے پیچھے اہتر اند کرتا ہے۔ وہ مستوی جس میں یہ رفاص اہتر اند کرتا ہے و پ کے گرد گردش میں حصہ نہیں لیتا۔ لیکن چونکہ مشاہد و پ کے گرد ارضی گردش کو دیکھ نہیں سکتا، اہتر اند کا مستوی اطراف و اکناف کی ارضی اشیاء کے حوالے سے گردش کرتا ہوا نظر آتا ہے۔ اس حرکت کی سمت اور اس کی مقدار کی پیمائشوں سے زمین کی یومی حرکت متعین ہوتی ہے۔ اگر زمین کے کسی ایک قطب پر اس تجربہ کو عمل میں لانا ممکن ہوتا تو اس کو دکھانے کی یہ بہترین صورت ہوتی۔ خط استواء کے کسی مقام پر اہتر اند کے مستوی کی کوئی ظاہری حرکت نہیں ہوگی۔

سماوی کرے پر کے سب نقطے، مجرد نقطوں کے، یومی حرکت میں حصہ لیتے ہیں۔ یہ دو نقطے بلاشبہ سماوی کرہ کے شمالی اور جنوبی قطب ہیں۔ ان نقطوں کو ملائے والا خط زمین کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور یہ خط وہ محور ہے جس کے گرد زمین گردش کرتی ہے۔ یہ ہمیشہ ذہن نشین رہے کہ زمین کے

البعاد سماوی کرہ کے مقابلہ میں ناقابل قدر ہیں اور اس لیے موجودہ مقاصد کے لیے ہم زمین کو صرف یہ سمجھیں گے کہ وہ سماوی کرہ کے مرکز پر صرف ایک نقطہ ہے۔ زمین کو ایسا سمجھنے میں خاص فائدہ یا سہولت یہ ہے کہ ہم نہ صرف سماوی کرہ کے محور کو زمین کے مرکز میں سے گذرتا ہوا فرض کر سکتے ہیں بلکہ ہم ہمیشہ یہ بھی تصور کر سکتے ہیں کہ یہ محور کسی مشاہد کے مقام میں سے بھی گذرتا ہے خواہ وہ زمین کی سطح پر کہیں واقع ہو۔ وہ قطب جو سماوی کرہ کے اُس حصہ میں واقع ہے جو شمالی عرض بلدوں میں رہنے والوں کو نظر آتا ہے شمالی قطب کے طور پر مشہور ہے۔ شمالی ہیئت داں طبقہ کی یہ خوش قسمتی ہے کہ شمالی قطب کا محل وقوع ایک چمکدار متصلہ ستارہ سے جسے قطب تارہ کہتے ہیں بہت عمدگی سے نمایاں ہے۔ جنوبی آسمان کا متناظر نقطہ جو جنوبی قطب کے طور پر مشہور ہے اتنی عمدگی سے نمایاں نہیں ہے کیونکہ اس کے قریب کوئی چمکدار ستارہ موجود نہیں۔

زمین کے خط استواء کا مستوی یومی گردش سے متاثر نہیں ہوتا۔ یہ مستوی سماوی کرہ کو ایک بڑے دائرہ میں قطع کرتا ہے، یہ بڑا دائرہ سماوی خط استواء کے نام سے مشہور ہے اور اس کے قطب آسمان کے شمالی اور جنوبی قطب ہیں۔ خط استواء کے متوازی اور اس سے محدود فاصلہ پر کا کوئی مستوی سماوی کرہ کو سماوی خط استواء پر قطع کرتا ہے۔ ایسے سب مستویوں کے لیے خط استواء منعدم خط ہوتا ہے۔ زمین کا کوئی قطر (یا بلاشبہ کوئی مستقیم خط جو استواء طویل زمین کے ساتھ لگا ہوا ہو اور دونوں طرف غیر محدود خارج کر دیا گیا ہو) سماوی کرہ کو دو نقطوں میں قطع کرے گا اور یہ نقطے زمین کی یومی گردش کی باعث وہ دائرے مرتسم کریں گے جنہیں متوازی دائرے کہا جاتا ہے۔ یہ دائرے بالعموم سماوی کرے کے چھوٹے دائرے ہوتے ہیں اور جب ان کو پیدا کرنے والا خط زمین کے محور کے متوازی ہوتا ہے تو یہ دائرے علی الترتیب شمالی اور جنوبی قطبوں میں ضم ہو جاتے ہیں اور جب یہ خط زمین کے محور پر عمود ہوتا ہے تو وہ ایک دوسرے پر منطبق ہو کر خط استواء بن جاتے ہیں۔

افق سماوی کرہ سماوی کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے ایک وہ نیم کرہ جو مری ہے اور دوسرا وہ نیم کرہ جو غیر مری ہے۔ جب کوئی ستارہ افق کے نیچے سے افق کے اوپر آ رہا ہوتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ ستارہ طلوع ہو رہا ہے اور جب وہ افق کے اوپر سے افق کے نیچے جا رہا ہوتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ ستارہ غروب ہو رہا ہے۔ اگر مشاہد زمین کے شمالی قطب پر ہو تو سماوی قطب شمالی اُس کے پاس پر ہو گا اور اس کا افق سماوی خط استوا ہو گا۔ اس صورت میں زمین کی یومی حرکت کی باعث ستارے افق کے متوازی حرکت کرتے نظر آئیں گے اور طلوع اور غروب کے مظاہر پیش نہ آئیں گے کرہ سماوی کے ایک نصف کا کوئی حصہ افق کے اوپر کبھی نہ آئے گا اور دوسرے نصف کا کوئی حصہ کبھی غروب نہ ہو گا۔ اگر مشاہد زمینی خط استوا پر ہو تو شمالی اور جنوبی قطب اُس کے افق پر ہوں گے اور دو نیم کرے جن میں افق سماوی کرہ کو تقسیم کرتا ہے مسلسل بدلتے رہیں گے۔ ستارے افق کے عمود وار طلوع ہوں گے اور آسمان ہر ستارہ مشاہد کے افق کے اوپر نیم حسی یوم تک نمودار رہے گا اور افق کے نیچے دوسرے نیم یوم تک غروب رہے گا۔ پس قطب پر کے مشاہد اور خط استوا پر کے مشاہد کے حالات میں یہ فرق ہو گا کہ مثل الذکر مقام پر کرہ سماوی کا جتنا حصہ کسی لمحہ نظر آتا ہے وہ حصہ کبھی جی زمین کی یومی گردش کی وجہ سے غیر مری نہیں ہو سکتا۔ بر خلاف اس کے خط استوا پر کے مشاہد کے لیے سماوی کرہ کا ہر جزو کبھی غیر مری ہو جاتا ہے اور کبھی مری۔

کسی زمینی مقام پر جو نہ قطب ہے اور نہ خط استوا پر واقع ہے سماوی کرہ کا کچھ حصہ ہمیشہ افق کے اوپر رہے گا اور کچھ حصہ ہمیشہ افق کے نیچے رہے گا اور باقی حصہ کبھی افق کے اوپر اور کبھی افق کے نیچے۔ ہر ستارہ زمین کی یومی حرکت کی وجہ سے کرہ سماوی کے ایک چھوٹے دائرہ میں گردش کرتا نظر آئے گا اس چھوٹے دائرہ کا مرکز سماوی کرے کا ایک قطب ہو گا۔ اگر چھوٹا

لہ اس میں انعطاف کی رعایت نہیں رکھی گئی ہے۔

دائرہ بالکلیہ افق کے اوپر واقع ہو تو ستارہ کبھی غروب نہ ہوگا اور اس لیے ہمیشہ نمودار رہے گا (بادلوں یا سورج کی روشنی وغیرہ کی مداخلت فی الحال خارج اندر بحث ہے)۔ اگر یہ دائرہ بالکلیہ افق کے نیچے واقع ہو تو ستارہ کبھی طلوع نہ ہوگا اور اس لیے زیر بحث مقام پر کبھی بھی نمودار نہ ہوگا۔ لیکن اگر یہ دائرہ افق کو قطع کرے تو ستارہ کبھی افق کے اوپر اور کبھی افق کے نیچے ہوگا۔

۲۹۔ نصف النہار اور اول السمیت۔

وہ بڑا دائرہ جو سماوی قطبیں میں سے اور مشاہد کے راس اور قدم میں سے گذرتا ہے اس مقام کا نصف النہار کہلاتا ہے جہاں مشاہد مقیم ہے۔ سماوی نصف النہار وہ بڑا دائرہ بھی ہے جو مشاہد کے ارضی نصف النہار کے مستوی اور سماوی کرہ کے تقاطع سے حاصل ہوتا ہے۔ پس سماوی نصف النہار وہ بڑا دائرہ ہے جو شمالی نقطہ نش (شکل ۲۲) سے افق کے علی القیوالم نکلتا ہے اور پھر جنوبی نقطہ ج پر آکر افق سے عموداً ملتا ہے اور پھر افق کے نیچے اپنے راستے کو نش تک جاری رکھتا ہے۔

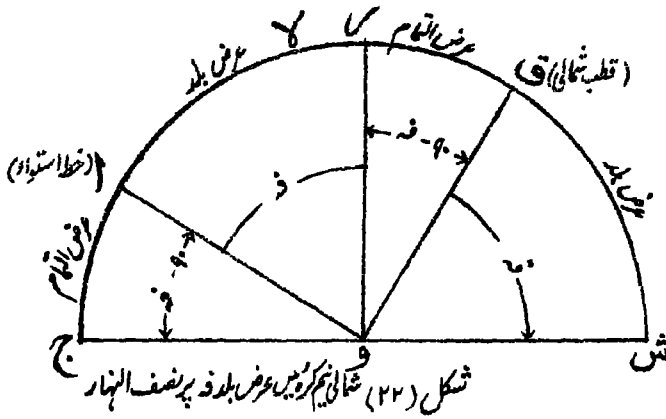
سماوی کرہ کی یومی گردش میں ہر ستارہ نصف النہار کو لازماً دو مرتبہ عبور کرے گا اور ہر موقع پر ہم کہتے ہیں کہ ستارہ مرور کر رہا ہے۔ شمالی اور جنوبی قطبوں سے نصف النہار دو نیم دائروں میں تقسیم ہو جائے، ان میں سے ایک میں راس ہوتا ہے اور دوسرے میں قدم۔ جب ستارہ پہلے نیم دائرہ کو مرور کرتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ بالائی تکبید پر ہے اور جب وہ دوسرے نیم دائرہ کو مرور کرتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ زیرین تکبید پر ہے۔

(۷۶)

سماوی کرہ کے بڑے دائروں میں نصف النہار سب سے زیادہ اہم ہے کیونکہ وہ کرہ کے دو اہم ترین نقطوں یعنی قطب قی اور راس ک (شکل ۲۲) میں سے گذرتا ہے۔ تین اور نقطے ہیں جو خاص طور پر قابل یادداشت ہیں۔ یہ نقطہ حسب ذیل ہیں، شمالی نقطہ نش اور جنوبی نقطہ ج جن میں نصف النہار افق کو قطع کرتا ہے، اور نقطہ ل جس میں نصف النہار سماوی خط استوا کو

قطع کرتا ہے۔

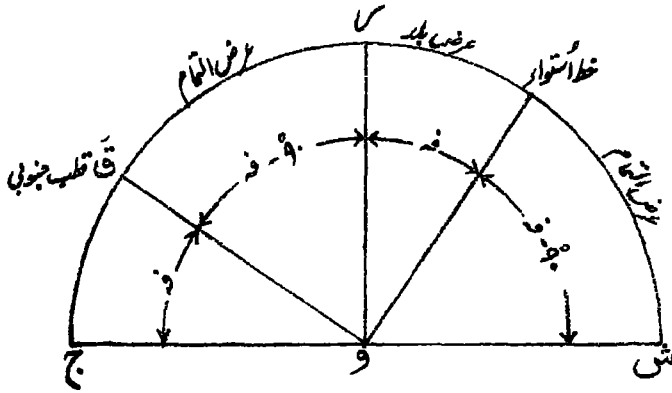
عرض بلد فہ وہ زاویہ ہے جو خط شیا قول کی سمت اور خط استواء کے درمیان ہوتا ہے۔ پس (شکل ۲۲) مُشاہد کا عرض بلد زاویہ α ہے یعنی



وہ زاویہ جو اس اور خط استواء کے درمیان ہے۔ چونکہ ق و α اور س و ش دونوں قائمہ زاویے ہیں اس لیے ش و ق، ϕ کے مساوی ہونا چاہیے اور زاویہ ش و ق جو افق کے اوپر قطب کا زاویہ ارتفاع ہے اس کا ارتفاع کہلاتا ہے جیسا کہ ہم دفعہ ۲۰ میں دیکھیں گے۔ پس ہم اس بنیادی مسئلہ پر پہنچتے ہیں کہ قطب کا ارتفاع مُشاہد کا عرض بلد ہوتا ہے۔

رأس α سے اوپر کے قطب ق تک جو قوس α = $۹۰ - \phi$ ہے اس کو بالعموم عرض التمام (Colatitude) کہتے ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ کوئی ستارہ α غروب نہیں ہوتا جب تک کہ اوپر کے قطب سے اس کا فاصلہ ق لا مُشاہد کے عرض بلد سے متجاوز نہ ہو۔ اُس ستارہ کو جو غروب نہیں ہوتا حائط قطبی (Circumpolar) ستارہ کہتے ہیں اور خط استواء سے شمالی قطب کی جانب اس کا فاصلہ α یعنی اس کا

شمالی میل (دفعہ ۳۱) ۹۰۔ فہ سے کم نہ ہوتا چاہئے۔ کوئی ستارہ طلوع نہ ہوگا اگر اس کا جنوبی میل ۹۰۔ فہ سے زیادہ ہو۔
 شکل ۲۲ کے جواب میں وہ نقشہ جو جنوبی نیم کرہ میں نصف النہار کو تعبیر کرتا ہے شکل ۲۳ میں دیا گیا ہے۔ یہ یاد رہے کہ جنوبی عرض بلد اکثر اس طرح ظاہر کئے جاتے ہیں کہ عرض بلد کی عددی قیمت کے ماقبل منفی علامت لگا دی جاتی ہے مثلاً شکل ذیل میں عرض بلد۔ فہ کا نصف النہار دکھایا گیا ہے۔



شکل (۲۳) جنوبی نیم کرہ میں جنوبی عرض بلد پر نصف النہار وہ بڑا دائرہ جو اس میں سے گذرتا ہے اور نصف النہار پر علی القوائم ہے (اول السمیت) کہلاتا ہے۔ یہ بڑا دائرہ افق کے مشرقی اور مغربی نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ عرض بلد فہ کے ایک مقام کے حوالہ سے ایک ستارہ کے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے راسی فاصلے علی الترتیب ۱۸۰۔ { (فہ + ضہ) } اور فہ۔ ضہ ہیں جہاں ضہ ستارہ کا میل ہے۔
 مثال ۲۔ اگر کسی ستارہ کا راسی فاصلہ ہمیشہ ایک ہی رہے تو ثابت کرو کہ مشاہد کا عرض بلد ۹۰۔ ہے یا ستارہ کا میل ۹۰۔ ہے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ اگر کوئی ستارہ ہمیشہ افق کے اوپر رہے تو { (فہ + ضہ) } ۹۰۔ سے زیادہ ہوگا۔ اگر وہ ہمیشہ افق کے نیچے رہے تو فہ۔ ضہ ۹۰۔ سے زیادہ ہوگا۔

اور اگر وہ طلوع اور غروب ہوتا ہو تو {۰۔ (فہ + ضہ) } ۹۰۔ اور فہ ۰۔ ضہ ۹۰۔
مثال ۴۔ اگر مشاہد کا عرض بلد معلوم ہو تو بتاؤ کہ کسی ستارہ کا میل کرور
 کے وقت اس کے راسی فاصلہ کا مشاہدہ کرنے سے کس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔
مثال ۵۔ گرینویچ کا عرض بلد ۵۱° ۲۸' ۳۸" ہے ثبات کرو کہ گرینویچ
 کے نصف النہار میں (شکل ۲۲)

$$\text{ج (} = \text{صر قی)} = ۳۸^\circ ۳۱' ۲۱''$$

$$\text{اور } \{ \text{صر} = \text{قی ش} = ۵۱^\circ ۲۸' ۳۸'' \}$$

مثال ۶۔ ثبات کرو کہ وہ کم سے کم عرض بلد ۵۱° ۲۹' ہے جس پر کے
 تمام ستارے جن کا شمالی میل ۳۸° ۳۱' سے تجاوز ہو حائل قطبی ستارے ہیں۔
 نیز ثبات کرو کہ اس عرض بلد پر وہ تمام ستارے جن کا جنوبی میل ۳۸° ۳۱' سے
 تجاوز ہو نمودار نہیں ہوتے۔

مثال ۷۔ ۱۳۔ نمبر کو سورج قطب شمالی سے ۱۰۸° پر ہے۔ ثبات
 کرو کہ کسی شمالی عرض بلد میں جو ۲۰° سے تجاوز ہو سورج افق کے اوپر طلوع نہیں ہوتا۔

مثال ۸۔ اسٹاک ہوم (Stockholm) کی رصد گاہ عرض بلد
 ۵۹° ۲۰' ۳۳" ش میں ہے اور راس امید (Cape of Good Hope) کی رصد گاہ عرض بلد
 ۳۳° ۵۶' ۵۵" ج میں واقع ہے۔ شعری (Sirius) کا میل ۱۶° ۳۵' ۲۲"۔
 اس کے ارتفاع معلوم کرو جب وہ علی الترتیب اسٹاک ہوم اور راس امید پر
 تکبذ میں ہو۔

نصف النہار پر قطب شمالی سے افق کے جنوبی نقطہ تک فاصلہ ۱۸۰°۔ فہ ہے
 جہاں فہ شمالی عرض بلد ہے (شکل ۲۲)۔ قطب سے کسی ستارہ کا فاصلہ جس کا میل
 ضہ ہو ۹۰°۔ ضہ ہے (جبکہ ضہ کے ماقبل مناسب علامت لگائی جائے) اس لیے
 افق کے جنوبی نقطہ سے ستارہ کا فاصلہ

۱۸۰°۔ فہ۔ (۹۰°۔ ضہ) = ۹۰°۔ فہ + ضہ
 ہے۔ پس اسٹاک ہوم کی صورت میں (چونکہ شعری کا میل منفی ہے) شعری کا ارتفاع
 ۹۰°۔ (۳۳° ۲۰' ۵۹")۔ (۱۶° ۳۵' ۲۲") = ۱۴° ۴۷' ۵۵"

جنوبی عرض بلد پر (شکل ۲۳) قطب جنوبی سے شمالی نقطہ تک قوس ۱۸۰۔ فہ
ہے اور قطب جنوبی سے شمالی میل فہ تک قوس ۹۰ + فہ ہے۔ اس لیے تکبید
کے وقت ارتفاع

$$۱۸۰ - فہ - (۹۰ + فہ) = ۹۰ - فہ - فہ$$

ہے۔ پس راس امید پر شعری کا ارتفاع بوقت تکبید یہ ہے

$$۹۰ - (۳۵۵۶۳۳) + (۳۵۱۶۴۵۲۲) = ۲۲۶۰۳۵۱۶$$

مثال ۹۔ اگر ایک حائل قطبی ستارے کے راسی فاصلے بالائی اور
زیرین تکبیدوں پر علی الترتیب راس ہوں اور اگر یہ دونوں تکبید راس کے شمال میں
ہوں تو ثابت کرو کہ مشاہد شمالی عرض بلد ۹۰۔ $\frac{۱}{۲}$ (۱۸۰ + ۱۸۰) میں ہے۔

۳۰۔ ارتفاع اور سمت۔

سماوی محدودوں کا صریح ترین نظام شاید وہ ہے جس میں افق کو بنیادی
دائرہ کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔ ہم فرض کریں گے کہ ستارہ افق کے اوپر
ہے اور ایک بڑا دائرہ راس سے ستارہ میں سے گذرتا ہوا کھینچا گیا ہے جو
افق پر اگر ختم ہوتا ہے جسے یہ علی القوا لہم قطع کرتا ہے۔ ایسے دائرہ کو انتصابی
دائرہ کہتے ہیں۔ اس دائرہ کی وہ قوس جو افق اور ستارہ کے درمیان ہے
ستارہ کا ارتفاع کہلاتی ہے اور ستارہ کا مقام متعین کرنے میں ایک محدود
کام کرتی ہے۔ دوسرا محدود سمت ہے جو افق پر مختلف طریقوں سے
شمار کیا جاتا ہے۔ مناسب یہ ہے کہ اس معاملہ میں ایک یکساں طریق عمل
اختیار کیا جائے۔ اس لیے ہم کسی جرم فلکی کا سمت افق کے شمالی نقطہ
سے افق کے گرد مشرق اور پھر جنوب کی طرف ستارہ کے انتصابی دائرہ کے
پائین تک قوسی فاصلہ سے پیمائش کریں گے۔ پس سمت کی ۰ سے ۳۶۰ تک

۱۔ سمت محسوب کرنے کا یہ طریقہ قدما کا اختیار کردہ ہے۔ میں نے اسے منسلک کیس کا رڈ
(Compass Card) پر دکھایا ہے جسے پروفیسر سلوینس تھامسن نے اندازہ ہربانی مجھے دکھایا تھا۔

کوئی قیست ہو سکتی ہے اور اس افق کا اندر شطب کسی اس طرح درجہ بندی ہوئی ہو
قدیم ہے، اس میں نہیں ہے۔ جب کسی ستارے کے ارتفاع اور سمت معلوم
ہوں تو اس کا محل متعین ہو جاتا ہے۔

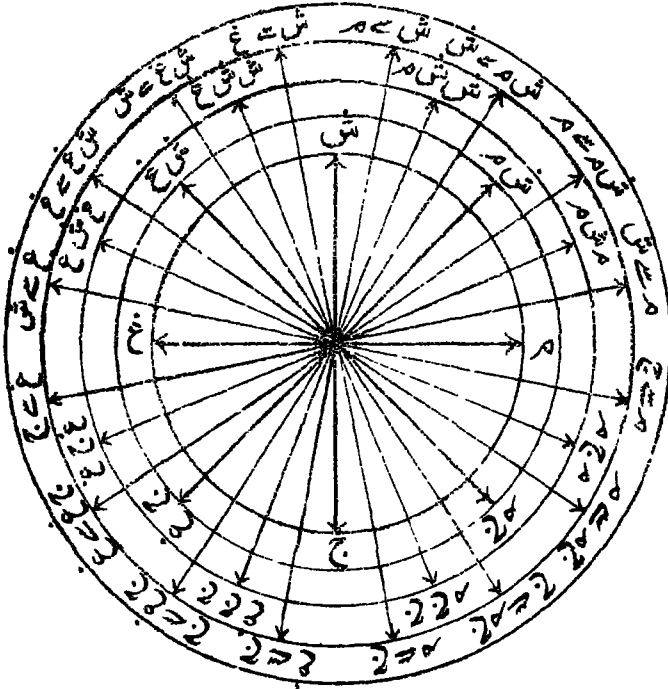
(۴۹) مثلاً اگر ایک ستارہ کا سمت ۳۱۰° اور اس کا ارتفاع ۱۵° ہو تو ستارہ کا
محل اس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔ ہم افق کے شمالی نقطہ سے چلتے ہیں اور مشرق
کی طرف سمت ۹۰° تک بڑھتے ہیں اور پھر وہاں سے جنوب کی طرف سمت
۱۸۰° تک اور مغرب کی طرف سمت ۲۷۰° تک جا کر اسی سمت میں اور ۲۰° ملے
کر رہے ہیں تو سمت ۳۱۰° پہنچ جاتا ہے۔ اس میں شک نہیں کہ وہ انتصابی
دائرہ جس پر ہم اس طریقہ سے پہنچے ہیں اس طرح بھی کھینچا جاسکتا تھا کہ اس کا سمت
۵۰° ہو یعنی وہ شمالی نقطہ سے مغربی جانب ۵۰° پر واقع ہے۔ لیکن اس
میدان میں منفی قیمتوں سے بچنا زیادہ سہو نہ تھا۔ بخشش ہے کیونکہ ۳۶۰°
جمع کرنے سے ہمیشہ ایسا کیا جاسکتا ہے۔ اس نقطہ کی جس پر انتصابی دائرہ
افق سے ملتا ہے اس طور پر سمت کے ذریعہ تعیین ہو جانے کے بعد انتصابی
دائرہ پر معلوم ارتفاع پر ایک نقطہ لینا ہوگا جو اس صورت میں افق کے
اوپر ۱۵° پر ہے، اس طرح ہمیں ستارہ کا مطلوبہ محل حاصل ہو جائیگا۔

ستارے کے ارتفاع کی بجائے ارتفاع کا متم استعمال کرنا اکثر سہولت کا
باعث ہوتا ہے، یہ متم بالعموم راسی فاصلہ کے طور پر مشہور ہے۔ مثلاً زیر بحث
سوال میں ۱۵° ارتفاع ہے اور اس لیے ۷۵° راسی فاصلہ ہے۔

سمت کی تقریری پیمائشوں کے لیے مقناطیسی کمپاس (قطب نما)
استعمال کیا جاتا ہے۔ کمپاس کی سوئی مقناطیسی شمال کو دکھاتی ہے جو اصلی
شمال سے کسی قدر منحرف ہوتا ہے، ان دو شمالوں کے درمیان جو زاویہ فیصل
ہے اس کو مقناطیسی انصراف کہتے ہیں۔ یہ انصراف مختلف اوقات
اور نیز مختلف مقامات پر تغیر ہوتا ہے۔ جزائر برطانیہ کے لیے ۱۹۰۸ء
میں سوئی اوسطاً ۱۰° اصلی شمال سے مغربی جانب ہٹی ہوئی رہتی تھی۔
اس طرح مقناطیسی شمال کا سمت ۱۹۰۸ء میں جزائر برطانیہ کے لیے

تقریباً ۳۴۲ تھا۔^{۱۵}

(۸۰) بحری کمپاس میں محیط کو $\frac{1}{4}$ اا کے مساوی وقفوں پر ۳۲ مساوی تقطوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اور سمتیں تیروں کے ذریعہ ایک کارڈ پر دکھائی جاتی ہیں۔ اس کمپاس کا نمونہ ذیل میں درج ہے۔



۱۵ نیاشنل فیزیکل لیا بوریٹری نے حسب ذیل معلومات از راہ مہرمانی ارسال کئے ہیں:-
۱۹۰۶ء میں اوسط مقناطیسی انصراف :-

۲۸۶۵۱۶ م

۲۸۶۳۱۶ م

۶۱۳۲۱۰ م

کیہ
اسٹونی ہرسٹ

ویالتیا

مقناطیسی انصراف گھٹ رہا ہے اور کیہ پراس کے تغیر کی سلازم مقدار کی اوسط

کارڈ پر چار خاص نقطے ش (مقناطیس، شمال پر) م (مشرق) ج (جنوب) اور غ (مغرب) نشان زدہ ہوتے ہیں ان میں سے ہر ایک ۹۰ کے وقفہ پر ہے۔ ان میں سے ہر وقفہ ان نقطوں سے جن پر ش م ج م ج غ ش غ کے نشان ہیں علی الترتیب تنصیف ہوتا ہے۔ اس طرح محیط آٹھ مساوی حصوں میں تقسیم ہو جاتا ہے۔ پھر ان میں سے ہر حصہ کی تنصیف کی گئی ہے ش اور ش م کی تنصیف ش ش م سے نشان زدہ ہے اور ش م اور م کی تنصیف م ش م سے نشان زدہ ہے اور علیٰ ہذا القیاس اس طرح سولہ نقطوں کی تعیین عمل میں آتی ہے۔ باقی سولہ نقطوں کو پہلے آٹھ نقطوں ش م ج غ ش م ج غ ش م ج غ ش م ج غ سے اس طرح اخذ کیا جاتا ہے کہ صرف لفظ سے کا اضافہ کر کے حرفوں ش م ج غ میں سے کوئی ایک ساتھ لکھ دیا جاتا ہے۔ مثلاً ش سے ش کے معنی "مغرب" شمال کی طرف ایک نقطہ ہے۔ اسی طرح "غ سے ج" کے معنی "مغرب" سے جنوب کی طرف ایک نقطہ ہے اور "ج سے م" کے معنی "ج" سے م کی طرف ایک نقطہ۔

مثال ۱۔ نقطہ "ش م سے ش" کا سمت معلوم کرو جبکہ یہ

(۸۱)

تقدیم نوٹ :-

قیمتیں منظرہ سینن کے سلسلوں کے لیے حسب ذیل ہیں :-

سلسلہ ۱۸۸۰ تا ۱۸۸۹ ۸۵۱
سلسلہ ۱۸۸۰ تا ۱۸۸۹ ۶۵۸

ویا النیامیں مشاہدات ۱۸۸۰ء میں شروع ہوئے۔ سلسلہ ۱۸۸۰ء سے ۱۸۸۹ء تک پانچ سالوں کے لیے انصراف میں سالانہ تغیرات کی اوسط قیمتیں حسب ذیل تھیں :-

اسٹونی ہرسٹ ۳۵۴
کیو ۴۵۱

فالماوتہ ۴۵۰

ویا النیام ۴۵۳

السمت متقاطعی شمال سے پیمائش کیا گیا ہو۔
 ش ۵: متقاطعی شمال سے چار نقطوں پر ہے اور ش ۴ سے
 ش کے معنی ش ۴ سے شمال کی طرف (یعنی اُلٹے) ایک نقطہ۔ اس لیے
 جواب ہے تین نقطے یعنی $3 \times \frac{1}{11} = \frac{3}{11}$ ۔ ۳۳۔
 مثال ۲۔ اسی طرح ثابت کرو کہ متقاطعی شمال سے غ ش غ
 کا سمت ۲۹۲۵ پر ہے۔
 مثال ۳۔ اگر ایک نقطہ کا سمت جو کمپس سے معلوم کیا گیا ہو
 ۲۳ ہو تو اصلی سمت معلوم کرو جبکہ متقاطعی انصراف ۱۸۶۵ غ ہو۔
 مثال ۴۔ متقاطعی شمال سے نقطہ ”ج ۴ سے ج“ کا اصلی سمت
 معلوم کرو اگر متقاطعی انصراف ۷۷ غ ہو۔

چوتھے باب پر مختلف مثالیں

مثال ۱۔ اگر مشاہد سے دو ستاروں کے حقیقی فاصلے ۲۰۰ ، ۱۰۰ ہوں
 اور ان ستاروں کے درمیان کرّہ سماوی پر ظاہری فاصلہ طہ ہو تو ثابت کرو کہ ان
 ستاروں کے درمیان حقیقی فاصلے کا مربع حسب ذیل ہے

$$۲۰۰ - ۲۰۰ = ۲۰۰ \text{ طہ} + ۲۰۰$$

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اول السمّت، افق، اور خط استواء ایک
 دوسرے کو وہی دو نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔

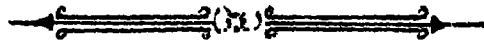
مثال ۳۔ اگر زمین کو ایک کرّہ نما تسلیم کرنے سے اس کے استوائی اور
 قطبی نصف قطر ۱ اور ب ہوں تو ثابت کرو کہ زمین کے کسی نقطہ پر بڑے سے بڑا
 ممکن زاویٰ فرق جو اس نقطہ پر زمین کے نصف قطر اور خط شاقول کے درمیان
 ہو سکتا ہے یہ ہے

$$\frac{۱ - ۲}{۲}$$

مثال ۴۔ اگر ایک ستارہ کا میل ضہ، عرض بلد فہ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ اس ستارہ کے سمت کو نصف النہار کی ایک جانب زاویہ جبّا (رحم ضہ قط فہ) اور دوسری جانب اس کے مساوی زاویہ کے درمیان امتزاج کرنا چاہئے۔
مثال ۵۔ ثابت کرو کہ اس زاویہ کی جیب التمام جو ایک ستارہ کا طریق بوقت غروب افق کے ساتھ بناتا ہے ”عرض بلد کی جیب مضروب میل کا قاطع“

کے مساوی ہے۔

مثال ۶۔ دو مقامات کا عرض بلد ایک ہی ہے اور ان میں سے گزرنے والے بڑے دائرہ سے قطب کا فاصلہ سورج کے میل کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ ان مقامات پر شب کا طول ان کے طول البلدوں کے فرق کے مساوی ہوگا۔



پانچواں باب

(۸۲)

صعود مستقیم اور میل - سماوی عرض بلد اور طول بلد

(۷۰)

صفحہ	دفعہ
۱۲۵	۳۱ - صعود مستقیم اور میل
۱۲۵	۳۲ - نقطہ راس اوج یا ۲
۱۳۰	۳۳ - ساعتی زاویہ اور کوئی یوم
۱۳۶	۳۴ - ساعتی زاویہ اور میل سے راسی فاصلہ اور سمت کی تعیین
۱۴۰	۳۵ - تفرقی مضابطوں کے اطلاقات
۱۴۸	۳۶ - کسی جرم فلکی کے تکبید کا وقت
۱۵۷	۳۷ - کسی جرم فلکی کا طلوع و غروب
۱۶۲	۳۸ - سماوی عرض بلد اور طول بلد

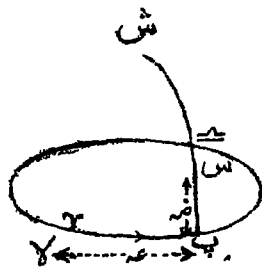
۳۱ - صعود مستقیم اور میل - اگرچہ ارتفاع اور سمت ایک

لحاظ سے کسی ستارے کے سادہ ترین محدود ہوتے ہیں لیکن بعض دوسرے محدودوں کے نظاموں سے زیادہ بہولت پیدا ہوتی ہے کسی ستارے کے ارتفاع اور سمت وقت کے ساتھ مسلسل بدلتے رہتے ہیں جس کا باعث یومی حرکت ہے۔ نیز ایک ہی آن پر ایک ہی ستارے کے ارتفاع اور سمت دو مختلف رصدگاہوں میں مختلف ہوتے ہیں۔ اس لیے یہ امر قابل ترجیح ہے کہ ایسے

محدود استعمال کئے جائیں جو یومی حرکت کی وجہ سے نہ بدلیں اور وہی رہیں خواہ مشاہد کے محل کے عرض بلد اور طول بلد کچھ بھی ہوں۔ ہم ایسے محدود معلوم کر سکتے ہیں جن میں مطلوبہ خاصیتیں موجود ہوں اگر ہم ستارہ کا حوالہ کر کے سماوی پیر کے ایک ثابت بڑے دائرہ سے دیں۔

سماوی خط استواء جیسا کہ قبل ازیں بتایا جا چکا ہے (صفحہ ۲۸) اپنے محل میں یومی گردش کے باوجود غیر متغیر رہتا ہے۔ نیز خط استواء یومی حرکت کے ساتھ ایک ایسا فطری تغلق رکھتا ہے کہ وہ خاص طور پر بنیادی دائرہ کا کام دینے کے لیے موزوں ہے چنانچہ علم نیست کروی میں سب سے زیادہ کارآمد محدود خط استواء کے حوالہ سے ہی پیمائش کئے جاتے ہیں۔ جب محدودوں کو خط استواء کے حوالہ سے لیا جاتا ہے تو کرہ سماوی کے کسی نقطہ کے محدود یومی حرکت کی وجہ سے نہیں بدلتے اور نہ اس وقت بدلتے ہیں جبکہ مشاہد کا مقام تبدیل ہو سوائے اس صورت کے جبکہ جرم سماوی زمین سے اس قدر نزدیک ہو کہ اختلاف منظر قابل قدر ہو جائے۔ اس پر بارہویں باب میں بحث کی جائے گی اس لیے یہاں اس کی تشریح ضروری نہیں ہے۔

کسی ستارہ کے محدود خط استواء کے لحاظ سے معلوم کرنے میں ہم حسب طریقہ اختیار کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ



شکل (۲۴)

خط استواء ۲ پ سے ہے
اور ایک بڑا دائرہ مش پ
(شکل ۲۴) سماوی قطب شمالی مش
سے ستارہ م میں سے گذرتا ہوا
کھینچا گیا ہے اور یہ دائرہ خط استواء
سے پ پر ملتا ہے۔ اس دائرہ پر
مقطوعہ قوس پ م جو خط
استواء اور ستارہ کے درمیان ہے

ستارہ کا میل کہلاتی ہے۔ قوس ۲ پ جو خط استواء پر کے ایک خاص

نقطہ ۲ سے اُس سمت میں ناپائی گئی ہے کہ شش اس کا شطب ہے ستارہ کا معدود مستقیم کہلاتی ہے۔

معدود مستقیم (یا ص)۔ مد جیسا کہ اکثر اختصار لکھا جاتا ہے) کو بالعموم ہم صرف ع سے ظاہر کریں گے اور اس کی پیمائش ۰ سے ۹۰ تک ہو سکے گی۔ میل کو ہم بالعموم ضہ سے ظاہر کریں گے اور اس کے ماقبل منفی علامت لگا دینگے اگر ستارہ شش خط استواء کے جنوب میں ہو۔ شش یعنی ۰۔ ۹۰ ضہ شمال قطبی فاصلہ ہے اور بعض اوقات ضہ کی جگہ ستارے کے دوسرے محدود کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔

۲۳۲۔ نقطہ راس الحمل یا ۲۔ ہم کسی آئندہ باب میں ثابت

ستاروں کے لحاظ سے سورج کی ظاہری سالانہ حرکت پر غور کریں گے۔ لیکن ہم یہاں اس قدر کہہ سکتے ہیں کہ سورج ثابت ستاروں کے حوالہ سے سال میں ایک مرتبہ زمین کی بوجی گردش کی سمت میں (یعنی مغرب سے جنوب اور پھر جنوب سے مشرق کی طرف) ایک مکمل دورہ مَرْتَم کرتا ہے۔ اس حرکت میں سورج کا مرکز تقریباً کرہ سیاوی کے ایک بڑے دائرہ پر حرکت کرتا ہوا معلوم ہوتا ہے۔ یہ بڑا دائرہ طریقی الشمس (Ecliptic) کے طور پر مشہور ہے۔ قدما نے اسے (Ecliptic) اس وجہ سے کہا کہ جب خسوف واقع ہوتے ہیں تو چاند اس بڑے دائرہ کو عبور کرتا ہے۔

اُس سمت کا مشاہدہ کرنے سے جس میں سورج طریقی الشمس کے گرد حرکت کرتا ہے ہم طریقی الشمس اور خط استواء کے نقاط تقاطع یا دو عقدوں کے درمیان امتیاز کر سکتے ہیں۔ ان عقدوں کی تخصیص اس طرح عمل میں آتی ہے اُس عقدہ کو جس پر سورج خط استواء کو اس کے جنوب سے شمال کی طرف حرکت کرتا ہوا عبور کرتا ہے راس الحمل کہتے ہیں اور ۱۔ سے علامت ۲ (۸۳)

سے ظاہر کرتے ہیں۔ سورج ۲ میں سے اس آگن گذرتا ہے جسے اعتدال بیع (Vernal equinox) کہتے ہیں۔ یہ ہر سال تقریباً بتاریخ ۲۱ مارچ واقع ہوتا ہے۔

مثلاً ۱۹۰۹ء میں اعتدال ربیع برابر ۲۱ مارچ بوقت ۶ گ ۱۲ گینچ اوسط وقت واقع ہوا تھا۔

دوسرا عقدہ یا وہ نقطہ جس پر سورج خط استواء کو اس کے شمال سے جنوب کی طرف حرکت کرتا ہوا عبور کرتا ہے برّج میزان کا پہلا نقطہ (First pt. of Libra) کہلاتا ہے اور اسے علامات ♎ سے تعبیر کرتے ہیں۔ سورج ♎ میں سے اُس آن گزرتا ہے جو اعتدال خریف (Autumnal equinox) کے طور پر مشہور ہے۔ (۱۹۰۹ء ستمبر ۲۳ بوقت ۴ گ ۴۵ گ - ۱ - ۹)۔

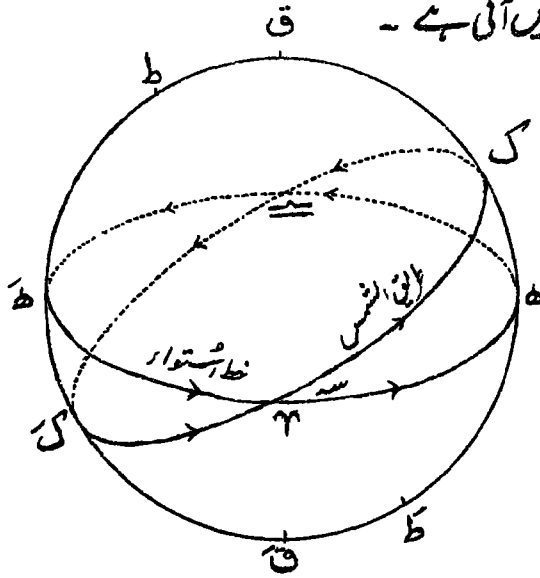
ہیئت دانوں نے متفقہ طور پر صعود مستقیم کی پیمائش کے لیے اس محل یعنی ۲ کو مبداء قرار دیا ہے۔ خط استواء پر شبست سمت وہ ہے کہ سورج کا صعود مستقیم جو سورج کی حرکت کی وجہ سے ہر آن متغیر ہے ہمیشہ بڑھتا ہے۔ مثلاً چونکہ ستاروں کے درمیان سورج کا راستہ مغرب سے جنوب کی طرف اور جنوب سے مشرق کی طرف ہوتا ہے اس لیے خط استواء پر بطریق الشمس کا صعودی عقدہ ۲ ہے اور نزولی عقدہ ♎ ۔

چونکہ اس محل علم ہیئت میں اس قدر غیر معمولی اہمیت رکھتا ہے اسے اس کا ذکر دینا مناسب ہے کہ اس جملہ میں لفظ ”محل“ کی اہمیت محض تاریخی ہے اس میں شک نہیں کہ ایک زمانہ میں وہ عقدہ جس میں سے سورج بوقت اعتدال ربیع گذر کرتا تھا برّج حمل میں واقع تھا لیکن اب ایسا نہیں ہے۔ ہم استقبال (Precession) کے باب (آٹھویں) میں دیکھیں گے کہ گو طریق الشمس کا استوی خطا میں صرف قدرے ہلکتا ہے لیکن خط استواء کا استوی اس طرح گردش کرتا ہے کہ طریق الشمس کے ساتھ اس کا نقطہ تقاطع اس دائرہ بطریق الشمس پر منحنی سمت میں تقریباً ۵۰ سالانہ شرح سے حرکت کرتا ہے حالانکہ طریق الشمس کے ساتھ وہ تقریباً مستقل زاویہ بناتا ہے۔ پس صرف اس وجہ سے ہی آسمان کے بڑے حصہ میں کسی جرم فلکی کا ص - وہ ہمیشہ بڑھتا رہتا ہے۔

۲ کا موجودہ محل تقریبی طور پر اس طرح دکھایا جاسکتا ہے۔ جب فرس (Pegasus) کا بڑا ربیع جنوب کی طرف ہو تو اپنے ذہن میں خیال کرو کہ

اس کا بایاں انتصابی ضلع نیچے کی طرف اس کے اپنے طول کے مساوی خارج کیا گیا ہے۔ اس طرح جو نقطہ حاصل ہوا اُس کی دائیں طرف ایک خط کھینچو جو مریض کے محلے افقی ضلع کے متوازی اور اس کے طول کا ایک چوتھائی ہو۔ یہ خط ایسے نقطہ پر ختم ہوگا جو اس المحل کے موجودہ محل کے بہت ہی قریب واقع ہے۔

شکل (۲۵) میں ۲۷ خط استواء ہے، ۲۸ گ کے طریق الشمس ہے، ق اور ق' علی الترتیب استواء کے شطب اور ضد شطب ہیں اور ط ط' علی الترتیب طریق الشمس کے شطب اور ضد شطب ہیں۔ ۲۸ گ پر کے تیرے سورج کی ظاہری حرکت کی سمت (بلحاظ ستاروں کے) دکھائی گئی (۸۵) ہے۔ ۲۷ پر کے تیرے وہ سمت دکھائی گئی ہے جس میں صعود مستقیم کی پیمائش عمل میں آتی ہے۔



شکل (۲۵)

بڑا دائرہ ۵ گ ۵ ک دائرہ انقلاب (Solstitial Colure) کے طور پر مشہور ہے اور گ، ک وہ نقطے ہیں جن پر سورج بالترتیب انقلاب گرا اور انقلاب سرما کے وقت پایا جاتا ہے۔ ق، ۲، ۲۷ میں

گذرنے والے بڑے دائرہ کو دائرہ اعتدالین (Equinoctial Colure) کہتے ہیں۔ خط استواء اور طریق الشمس کے درمیان میلان کو بالعموم طریق الشمس کا میلان (Obliquity) کہتے ہیں۔ طریق الشمس کے میلان کی اوسط قیمت جو ایفیمرس بابت نقطہ میں دی گئی ہے ۲۳° ۲۷' ۴۰" ہے۔ اس میں کبوت (Nutation) کی باعث قدرے عارضی کمی و بیشی ہوتی ہے (دیکھو آٹھواں باب) اور نیز اس میں خفیف مسلسل تنزل ۸۴" ۶۲" فی صد سال کی شرح سے عمل میں آتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر کرہ سادی پر ایک نقطہ صعود مستقیم عہ اور میلان نہ ہو تو ثابت کرو کہ اس کرہ پر بعض خاص نقطوں کے لیے (شکل ۲۵) عہ ضہ کی قیمتیں حسب ذیل ہیں جہاں سے طریق الشمس کا میلان ہے:-

عہ	ضہ	عہ	ضہ
۵	۹۰	ق	۹۰
۵	۲۷۰	ق	۹۰
ک	۹۰	ط	۹۰
ک	۲۷۰	ط	۹۰

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ سورج کا صعود مستقیم عہ اور میلان نہ ہمیشہ مساوات

مس ضہ = مس سہ جب عہ

سے مربوط ہوتے ہیں۔

مثال ۳۔ بتائیے ۹ مئی ۱۹۱۰ء سورج کا صعود مستقیم ۲۵° ۲۰' ہے اور طریق الشمس کا میلان ۲۳° ۲۷' ہے۔ ثابت کرو کہ سورج کا میلان ۱۷° ۵' والا ہے۔

۳۳۔ ساعتی زاویہ اور کوکبی یوم۔ بعض اوقات اس میں

↓ Hour Angle

سہولت ہوتی ہے کہ مبداء کو جہاں سے خط استواء پر محدودوں کی پیمائش عمل میں آتی ہے، اُس نقطہ پر لیا جائے جو افق کے اوپر خط استواء اور مشاہد کے نصف النہار کا نقطہ تقاطع ہے۔ یونی حرکت کی باعث جو نصف النہار کو ایک کوکبی یوم کے عرصہ میں کرہ سماوی کے گرد پھراتی ہے یہ مبداء کرہ سماوی ثابت نقطہ نہیں ہے بلکہ وہ خط استواء پر یکساں طور پر حرکت کرتا ہے اور اپنی گردش ایک کوکبی یوم میں مکمل کرتا ہے۔ اس لیے اگر کوئی جرم فلکی کرہ سماوی پر ثابت ہو تو اس کا ایک محدود جس کی پیمائش اس متحرک مبداء سے عمل میں آتی ہو وقت کے ساتھ ضرور بدلنا چاہئے۔ اگر ایک بڑا دائرہ جسے ساعتی دائرہ کہتے ہیں قطب سے کسی ستارہ تک کھینچا جائے تو وہ زاویہ جو یہ ساعتی دائرہ نصف النہار کے ساتھ بنائے ساعتی زاویہ کہلاتا ہے۔ اس طرح کسی ستارہ کا ساعتی زاویہ اور اس کا میل (اس کا قطبی فاصلہ) محدودوں کا ایک نظام بناتے ہیں جو اکثر سہولت کا باعث ہوتے ہیں۔

کسی جرم فلکی کا میل یومی حرکت کی وجہ سے تبدیل نہیں ہوتا۔ لیکن اس کا ساعتی زاویہ برابر بدلتا رہتا ہے۔ چونکہ ستارہ بالائی نگاہ سے مغربی جانب حرکت کرتا نظر آتا ہے اس لیے ہم ساعتی زاویہ کی پیمائش نصف النہار سے مغربی جانب کریں گے۔ پس ساعتی زاویہ صفر ہو گا جب جرم بالائی نگاہ پر ۱۸۰° تک بڑھے گا جیسے جیسے جرم زیرین تکبہ تک متحرک ہو گا اس کے بعد وہ مسلسل ٹیڑھتا رہے گا تا آنکہ وہ پھر بالائی نگاہ پر ۳۶۰° ہو جائے۔ اس لیے نصف النہار کی مغربی جانب ساعتی زاویہ ۰° اور ۱۸۰° کے درمیان ہوتا ہے۔ نصف النہار کی مشرقی جانب ساعتی زاویہ ۱۸۰° اور ۳۶۰° کے درمیان ہوتا ہے۔ پس اس قرار داد کی بموجب ساعتی زاویہ ہمیشہ بڑھتے ہیں اور چونکہ کسی زاویہ میں ۳۶۰° جمع یا تفریق کئے جاسکتے ہیں جبکہ یہ زاویہ منطقی تفاعل میں استعمال ہو اس لیے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ سب ساعتی زاویے ۱۸۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہوتے ہیں اور یہ کہ مغربی جانب ساعتی زاویے مثبت ہوتے ہیں اور مشرقی جانب منفی۔

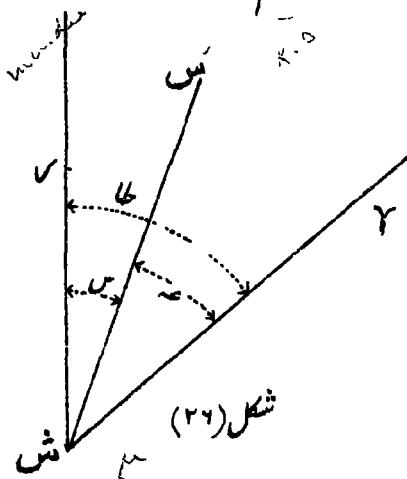
(۸۷) ساعتی زاویہ (بر خلاف میل کے) مشاہد کے مقام کے ساتھ بدلتا ہے۔ مثلاً جب کوئی ستارہ بمقام گرینوچ نصف النہار کو عبور کر رہا ہو تو اس کا ساعتی زاویہ وہاں صفر ہے۔ لیکن اسی آن پر یہ ستارہ مشرقی مقامات کے نصف النہاروں کو عبور کر چکا ہو گا اور اس لیے ایسے مقامات پر اس سے مغربی ساعتی زاویوں کا اظہار ہو گا۔ اُس مقام پر جہاں طول بلد گرینوچ کے مشرق میں ۲ گھنٹے ہے ستارہ کا ساعتی زاویہ دو گھنٹے مغرب نظر آئے گا حالانکہ اسی آن پر گرینوچ کے مشاہد کو یہ ستارہ نصف النہار پر نظر آئے گا۔ زیادہ عام طور پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ دو مقامات پر جن کے مشرقی طول بلد علی الترتیب ل اور ل ہیں ایک ہی جرم کے ساعتی زاویے (مغربی) ایک ہی آن پر طہ اور طہ + ل - ل ہوں گے۔

کسی متعجب نصف النہار پر اس محل کے دو متصل مروروں کے درمیان وقت کا جو وقفہ ہوتا ہے اس کو ”کو کبی یوم“ کہتے ہیں۔ اگر ہم یہ یاد رکھیں کہ ستارے کمرہ سماوی پر عملاً ثابت ہیں اور اگر ہم بعض چھوٹی بے قاعدگیوں کو فی الحال نظر انداز کریں تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ نصف النہار پر ایک ہی ستارہ کے دو متصل مروروں کے درمیان وقت کا وقفہ کو کبی یوم ہے۔ نیز کو کبی یوم کی تعریف تمام عملی مقاصد کے لیے کافی صحت کے ساتھ یوں بھی کی جاسکتی ہے کہ یہ وہ وقفہ ہے جس میں زمین اپنے محور کے گرد ایک مکمل گردش کر لیتی ہے (دیکھو دفعہ ۲۸)۔ اگر اسے اوسط شمسی وقت میں بیان کیا جائے تو کو کبی یوم ۲۴ گ ۵۶ م ۹.۹۰۶ س کا ہوتا ہے۔

شمسی یوم کی طرح کو کبی یوم بھی ۲۴ سادی دقیقوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اور ان دقیقوں کو کو کبی گھنٹے کہتے ہیں۔ کو کبی گھنٹہ ۶۰ منٹوں (دقیقوں) میں تقسیم ہوتا ہے اور ہر منٹ ۶۰ ثانیوں میں۔

کسی ستارہ کے مرور کے بعد کو کبی وقت کے ایک گھنٹے میں اس کا ساعتی زاویہ درجوں میں پیمائش کردہ ۱۵ ہو گا یہ محیط کا ۲۴ واں حصہ ہے۔ ساعتی زاویہ کو درجوں میں بیان کرنے کی بجائے کو کبی وقت میں بیان کرنے کا

دستور ہے۔ مثلاً اگر ستارہ کو نصف النہار سے گزرنے میں گھنٹے (کو کبی) ہو گئے
چوں اور اگر ستارہ اور خط استواء کے درمیان اس ثانوی دائرہ کا مقطع ۳۵°
ہو جو قطب سے خط استواء تک ستارہ میں سے گزرتا ہو اچھینچا گیا ہے تو ہم
اس مخصوص مقام اور اس مخصوص آن پر ستارہ کے محل کو یہ کہہ کر متعین کر سکتے
ہیں کہ اس کا مغربی ساعتی زاویہ تین گھنٹے اور اس کا شمالی میل ۳۵° ہے۔
ساعتی زاویہ کو جو اس محل سے مغربی جانب ہو ۱۵۰° فی گھنٹہ کی شرح
سے وقت میں تبدیل کریں تو کو کبی وقت حاصل ہو گا۔ جب اس محل
نصف النہار پر بالائی تکبذ میں ہو تو کو کبی وقت ۱۰ گھنٹہ ہوتا ہے۔ نصف النہار
سے گزرنے کے بعد اس محل کا ساعتی زاویہ ۱۵۰° ہو جائے تو کو کبی وقت
ایک گھنٹہ ہوتا ہے اور اگر اسے نصف النہار سے گزرنے میں دیر ہوئی ہو کہ
اس کا ساعتی زاویہ ۲۸۵° ہو تو کو کبی وقت ۱۹ گھنٹے ہو گا۔



اس طرح ہمیں ایک اہم رشتہ حاصل ہوتا ہے جو کسی جرم کے ساعتی زاویہ اور صعود مستقیم کو کوکبی وقت کے ساتھ مربوط کرتا ہے۔
مثال ۱ - ثابت کرو کہ اگر کسی ستارہ کا صعود مستقیم معلوم ہو تو اس کا ساعتی زاویہ ناپ کر کوکبی وقت معلوم کیا جاسکتا ہے۔
مثال ۲ - اگر ایک ستارہ کا ساعتی زاویہ مشرقی $98^{\circ} 11' 15''$ ہو اور اس کا صعود مستقیم $21^{\circ} 23'$ ہو تو ثابت کرو کہ کوکبی وقت $38^{\circ} 36' 13''$ ہے۔

ساعتی زاویہ مغربی ہے $360 - (98^{\circ} 11' 15'') = 261^{\circ} 48' 45''$ ایسے ایسے 15° فی گھنٹہ کی شرح سے وقت میں تبدیل کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے $16^{\circ} 24' 15''$ اس لیے
 $38^{\circ} 36' 13'' = 38^{\circ} 36' 13'' + 16^{\circ} 24' 15'' = 55^{\circ} 00' 28''$ کیونکہ 24° کو ہمیشہ خارج کیا جاسکتا ہے۔

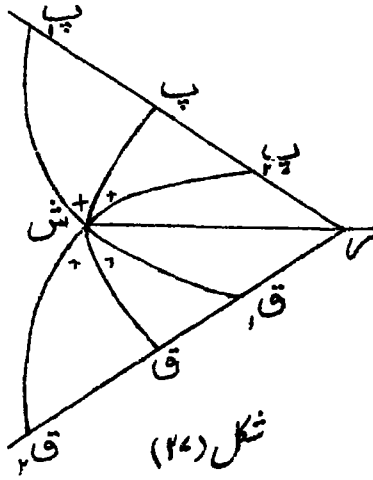
مثال ۳ - اگر طے ساعتی زاویہ ہو جس کی پیمائش درجوں میں ہوئی ہے تو ثابت کرو کہ اس زاویہ کا دائری ناپ 22° طے 360° ہے۔
مثال ۴ - اگر کسی ساعتی زاویہ میں گھنٹوں کی تعدادات ہو تو ثابت کرو کہ اس زاویہ کا دائری ناپ 22° ت 12 ہے۔

مثال ۵ - شمالی عرض بلد قد کے کسی مقام پر سمت α کے ایک انتصابی دائرہ پر کسی ستارہ کے ایک مرور اور دوسرے انتصابی دائرہ پر جو نصف النهار کے ساتھ دہری زاویہ بنائے ایک مرور کے درمیان جو وقفہ ہوتا ہے وہ سب ستاروں کے لیے وہی ہوتا ہے اور ایک کوکبی یوم کے تم (جب فہ مس α) کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ش (شکل ۲) قطب سماوی، اس کا ہے، س پ اور س ق مفروضہ انتصابی دائرے ہیں، ش چ اور ش ق بڑے دائرے ہیں جو انتصابی دائروں پر عمود ہیں، پ اور پ ق وہ نقطے ہیں جن پر کوئی دیا ہوا ستارہ س پ کو عبور کرتا ہے اور ق، ق وہ نقطے ہیں جن پر

ملاحظہ
س

یہ ستارہ ساق کو عبور کرتا ہے۔ اب تشاکل سے
 زاویہ پ ش پ = زاویہ پ ش پ = زاویہ ق ش ق = زاویہ ق ش ق
 اور اس لیے
 زاویہ پ ش ق = زاویہ پ ش ق = زاویہ پ ش ق
 اور اس لیے یہ منہجہ ستارہ پر منحصر نہیں ہے۔



نیز م پ ش س = جب فہ مس (اور مطلوبہ وقفہ کو کبھی یوم کا
 مم (جب فہ مس) \ \pi

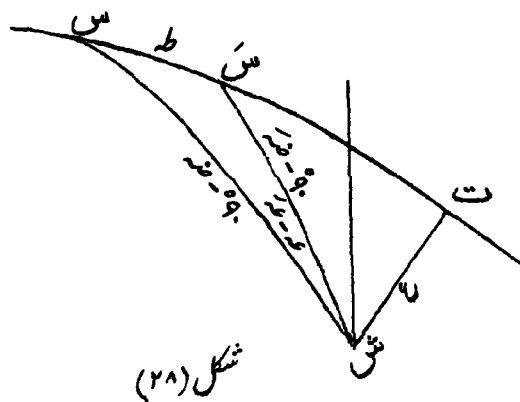
۶۔ مثال ۲۔ اگر عرض بلد فہ کے ایک مقام پر ستاروں کا ایک زوج
 جن کے محدود علی الترتیب عہ، ضہ اور عہ، ضہ ہیں کبھی ایک ہی اتصالی دائرہ
 پر آجائے تو ثابت کرو کہ

جم فہ < جم ضہ جم ضہ جب (عہ - عہ) قم طہ

جہاں طہ وہ قوس ہے جو این ستاروں کو ملاتی ہے۔

فرض کرو کہ یہ دو ستارے س، س (شکل ۲۸) ہیں۔ تب مثلث

سش سش سش کے گرد گردش کرتا ہے۔ فرض کرو کہ سش ت (= ع) سش سش پر نمود ہے۔ تو بڑے دائرہ سش سش پر کے کسی نقطہ کا سش سے فاصلہ سے کم نہیں ہو سکتا۔ لیکن اگر سش سش ایک ہی انتظامی دائرہ پر ہوں تو یہ قوس اس میں سے گزرنی چاہئے۔ اس لیے ۹۰۔ نہ ع یا جم نہ ع جب ع۔ لیکن جم نہ جب سش سش ت = جب ع اور جب سش سش جب ط = جم نہ جب (ع۔ ع) اس لیے جب ع = جم نہ جب (ع۔ ع) نم ط



لکھ لیے جا سکتے ہیں۔ اس قرار داد کی بہ وجہ کہ سمت کی پیمائش نقطہ شمالی سے عمل میں آئی چاہئے (دفعہ ۳) سمت اور ایسی سمت میں لیا جاتا ہے کہ قدم افق کا شطب ہو جب اسے (افق) ایک بڑا دائرہ سمجھا جائے جس کی درجہ بندی سمت کی پیمائش کے لیے عمل میں آئی ہو۔ بلاشبہ قطب شمالی خط استوا کا شطب ہے جبکہ اس کی درجہ بندی صعود مستقیم کی پیمائش کے لیے کی گئی ہو۔ شطب کی تعریف سے (دفعہ ۶) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر دو درجہ دار بڑے دائروں ل اور ل کے شطب لٹش اور لٹش ہوں تو لٹش لٹش (۱۸۰) کا شطب ل پر ل کا صعودی عقدہ ہے اور لٹش لٹش (۱۸۰) کا شطب ل پر ل کا صعودی عقدہ ہے۔ اس طرح خط استوا پر افق کا صعودی عقدہ وہ نقطہ ہوگا جو مغرب کی جانب ہے اور اس لیے قہ یعنی اس صعودی عقدہ کا سمت ۰° ہے جبکہ اس کی پیمائش نقطہ شمالی کو مبدأ مان کر عمل میں آئے۔ کو کبھی وقت طاوہ ساعتی زاویہ ہے جس قدر ۲ نصف النہار کے مغرب میں ہے۔ اس لیے اس سمت کو ذہن میں رکھنے سے جس میں صعود مستقیم کی پیمائش کی جاتی ہے خط استوا پر افق کے صعودی عقدہ کا صعود مستقیم قہ ۰° + طا کے مساوی حاصل ہونا چاہئے۔ افق اور خط استوا کے درمیان زاویہ ۹۰° + قہ ہے کیونکہ یہ وہ زاویہ ہے جو ان کے شطبوں کے درمیان ہے۔ آخر الامر چونکہ اس افق کا فید شطب ہے اس لیے قہ منفی ہے اور ی - ۹۰° کے مساوی ہے جہاں ی راسی فاصلہ ہے۔ دفعہ ۱۱ (۹۱) کے ضابطوں (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) میں ضروری اندراجات عمل میں لانے سے مطلوبہ مساواتیں

$$\left. \begin{array}{l} \text{جب } \lambda \text{ جب } \gamma = \text{جم قہ جب } (\text{طا} - \text{عہ}) \\ \text{جم } \lambda \text{ جب } \gamma = \text{جم قہ جب قہ جب قہ جب } (\text{طا} - \text{عہ}) \\ \text{جم } \gamma = \text{جب قہ جب قہ} + \text{جم قہ جب } (\text{طا} - \text{عہ}) \end{array} \right\} \dots (۱)$$

اور ان کے مماثل حسب ذیل مساواتیں

جیب (طا۔ عہ) جم فہ = جیب ل جیب ی
 جم (طا۔ عہ) جم فہ = جم فہ جیب ی - جیب فہ جم ل جیب ی ... (۲)
 جیب فہ = جیب فہ جیب ی + جم فہ جم ل جیب ی
 حاصل ہوتی ہیں۔

مساواتوں (آ) سے ہم راسی فاصلہ اور سمت محسوب کر سکتے ہیں جبکہ میل اور ساعتی زاویہ (طا۔ عہ) معلوم ہوں، اور اس کے بالعکس مساواتوں (۲) سے ہم میل اور ساعتی زاویہ معلوم کر سکتے ہیں جبکہ راسی فاصلہ اور سمت معلوم ہوں۔

اگر ساعتی زاویہ اور میل معلوم ہوں تو راسی فاصلہ کی تعیین کے لیے حسب ذیل طریقہ بہت سہولت بخش ہے۔ وہ زاویہ جو ستارہ پر اس قوس کے محاذی بنتا ہے جو راس اور قطب کو ملاتی ہے اختلاف منظری زاویہ (Parallactic angle) کہلاتا ہے۔ ہم اسے عا سے تعبیر کریں گے۔ اب اسکی تعیین کے لیے دفعہ (۱) کی بنیادی مساواتوں (۱) (۲) (۳) سے حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں جن میں ساعتی زاویہ (طا۔ عہ) کی بجائے م لکھا گیا ہے:

جم ی = جیب فہ جیب فہ + جم فہ جم فہ
 جیب عا جیب ی = جم فہ جیب م
 جم عا جیب ی = جیب فہ جم فہ - جم فہ جیب فہ جم م
 اگر م اور فہ معلوم ہوں تو اختلاف منظری زاویہ عا اور راسی فاصلہ

ی دونوں، ان مساواتوں سے معلوم کئے جاسکتے ہیں۔ چونکہ جیب ی اور جم فہ دونوں ہمیشہ مثبت ہوتے ہیں اس لیے دوسری مساوات سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عا اور م کی ایک ہی علامت ہے۔ یہ دونوں نصف النہار کے مغرب میں مثبت ہیں اور نصف النہار کے مشرق میں منفی۔

اکثر اس امر میں سہولت ہوتی ہے کہ ان اعمال حساب کو ذیلی مقداروں کی مدد سے مکمل کیا جائے۔ ہم دو نئی مقادیر م اور ن شرطوں

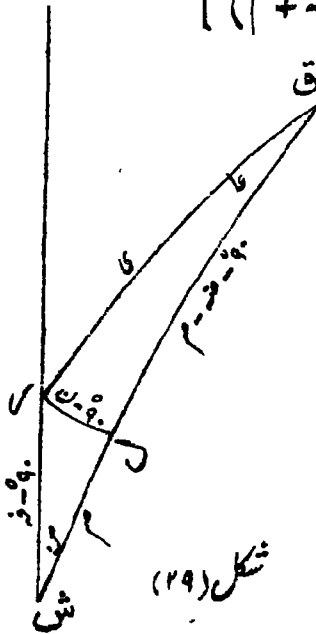
$$\left. \begin{array}{l} \text{جم ن} = \text{جم فہ جب س} \\ \text{جب ن جم م} = \text{جب فہ} \\ \text{جب ن جب م} = \text{جم فہ جب س} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (۴)$$

کے ذریعہ داخل کرتے ہیں۔ اگر م اور ن کی قیمتوں کا ایک زوج ن، م۔
ان مساواتوں کو پورا کر کے تو یہ مساواتیں ۳۶۰ - ن اور ۹۸۰ + م سے
بھی پوری ہوں گی۔ اس لیے کوئی ہرج نہ ہوگا اگر ہم آئندہ محل میں ن، م۔
استعمال کریں یا ۳۶۰ - ن، ۹۸۰ + م۔ استعمال کریں۔ ان دو زوجوں میں سے (۹۲)
کسی ایک کو ن، م کے طور پر لیتو (۳) میں اندراج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\left. \begin{array}{l} \text{جم ی} = \text{جب ن جب (ضہ + م)} \\ \text{جب عا جب ی} = \text{جم ن} \\ \text{جم عا جب ی} = \text{جب ن جم (ضہ + م)} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (۵)$$

ان مساواتوں کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\left. \begin{array}{l} \text{مس عا} = \text{م ن قضا (ضہ + م)} \\ \text{مس ی} = \text{قضا عام (ضہ + م)} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (۶)$$



ان میں سے پہلی
مساوات سے عا معلوم ہوتا
ہے اور پھر دوسری مساوات
سے ی ملتا ہے۔ اس میں
شک نہیں کہ ی کو مساواتوں
(۵) میں سے پہلی مساوات
سے بھی معلوم کیا جاسکتا ہے
لیکن ہمیشہ یہ امر قابل ترجیح
ہے کہ کسی زاویے کو اسکی
جیب التمام سے معلوم
کرنے کی بجائے اس کے

ماس سے معلوم کیا جائے (دفعہ ۳)۔

ضوابط (۴) اور (۵) ہندسہ کے طور پر فوراً حاصل کئے جاسکتے ہیں۔
کیونکہ اگر س ل، ش ق پر محدود ہو (شکل ۲۹) تو ش ل = م اور
س ل = ۹۰ - ن

مساداتوں (۴) سے یہ واضح ہے کہ ن اور م چونکہ صرف عرض بلد
اور ساعتی زاویے پر منحصر ہوتے ہیں اس لیے وہ سب میلوں کے ستاروں
کے لیے وہی ہوتے ہیں۔ اس لیے کسی معلومہ رصدگاہ کے لیے یا زیادہ صحیح طور پر
کسی دے ہوئے عرض بلد کے لیے ایک مرتبہ ایک جدول کا تیار کر لینا بہت
بخش ہوتا ہے جس سے اس عرض بلد پر کے کسی مقام کے لیے ہر مخصوص
ساعتی زاویہ کے جواب میں م اور ن کی قیمتیں فوراً حاصل کی جاسکتی ہیں
مثال ۱ - اس امر کی تصدیق کرو کہ مساداتوں

مس عا = م ن قط (ضہ + م) اور مس ی = قط عا م (ضہ + م)
میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی جبکہ م اور ن کو علی الترتیب ۱۸۰ + م اور ۳۶۰ - ن
میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

مثال ۲ - ستارہ ۶۱ دجاہ (61 Cygni) کا راسی فاصلہ اور
اختلاف منظری زاویہ معلوم کرو جبکہ وہ نصف النہار سے ۳۶۰ پر ہو۔ اس کا
میل + ۳۸ ۹ ہے اور مشاہد کا عرض بلد ۵۳ ۲۳ ہے۔

مساداتوں (۴) سے ہم معلوم کرتے ہیں م = ۲۴ ۲۳ اور ن = ۹۱ ۶۶ ۶۶
اس لیے ضہ + م = ۵۲ ۹۵ اور (۶) سے عا = ۱۸۰ - ۲۴ ۲۳
ی = ۱۵۵ ۳۶

۳۵ - تفرقی ضابطوں کے اطلاقات - (۹۳)

فرض کرو کہ قطب ش، ستارہ ق، اور راس م کو ملانے سے ایک
مثلث ش ق م حاصل کیا گیا ہے (شکل ۲۹)۔ اس مثلث پر دفعہ (۴)
کے بنیادی ضابطے استعمال کرنے سے جو چہ تفرقی ضابطے حاصل ہوتے ہیں

ان کا ایک ساتھ لکھ لینا سہولت بخش ہے۔ توس ش ق قطبی فاصلہ ہے جو
۹۰۔ ضہ کے مساوی ہے، عرض التمام ش کر ہے یعنی ۹۰۔ فہ ش کر
ر اسی فاصلہ ی ہے اور عرض بلد ۹۰۔ ی ہے۔ اختلاف نظری زاویہ
عاً ق پر ہے۔ یہ زاویہ مثبت ہے کیونکہ وہ نصف نہار کے مغرب
میں ہے۔ ساعتی زاویہ س طاً۔ عہ کے مساوی ہے جہاں طاً مثلاً
کا کو کسی وقت ہے اور عہ ستارہ کا صعود مستقیم ہے۔ سمت و شمال
سے مشرق کی طرف نایا جاتا ہے اور اس لیے ق ش ۹۰۔ و ہے۔
دفعہ ۴ کے چھ تفرقی ضابطے جن میں سے صرف تین غیر تالیج ہیں
ذیل کی شکلوں میں لکھے جاسکتے ہیں:

مف ضہ + جم عامف ی۔ جم س مف فہ۔ جب س جم فہ مف ا۔ =۔ (۱)
مف ی + جم ا مف فہ + جم عامف ضہ + جم فہ جب ا مف س =۔ (۲)
مف فہ + جم ا مف ی۔ جم س مف ضہ + جم فہ جب س مف عا۔ =۔ (۳)
مف ا۔ جم ی مف عا۔ جب فہ مف س۔ جب س جم فہ مف فہ =۔ (۴)
مف س + جب ضہ مف عا۔ جب فہ مف ا۔ جب عا جم ضہ مف ی =۔ (۵)
مف عا۔ جم ی مف ا + جب فہ مف س۔ جب ا جب ی مف فہ =۔ (۶)
مثلاً کے چار عنصروں میں سے چار خاصہوں کے اجتماعات پندرہ ہو سکتے
ہیں۔ چار کا ہر ایک جٹ ایک مساوات سے مربوط ہوتا ہے (دفعہ ۱)۔
اکثر صورتوں میں جہاں عنصروں کے تقویرات مطلوب ہوتے ہیں دو عنصر مستقل
رہتے ہیں اور باقی دو عنصروں کے اضافی تغیرات معلوم کرنے ہوتے ہیں۔ ایسے
ہم ان پندرہ مساواتوں میں سے وہ مساوات منتخب کرتے ہیں جس میں وہ
دو عناصر جو مستقل ہیں اور وہ دو عناصر جن کے اضافی تغیر مطلوب ہیں شامل
ہوں۔ اگر اس مساوات کو ان دو متغیروں کے لحاظ سے تفرق کیا جائے تو
مطلوبہ مسئلہ مل جاتا ہے۔

مثلاً ہم وہ صورت لیتے ہیں جو اکثر عرض بلد کی تعیین میں پیش ہوتی
ہے جبکہ کسی ستارہ کے راسی فاصلہ کا مشاہدہ کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک

ستارہ کا ساعتی زاویہ اور میل صحت کے ساتھ ہمیں معلوم ہیں لیکن مفروضہ راہی فاصلہ میں خطا مفی ہے۔ ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ محسوبہ عرض بلد میں کیا خطا واقع ہوگی کیونکہ خطا دار راہی فاصلہ، صحیح ساعتی زاویہ اور میل کے ساتھ استعمال ہوا ہے۔ یہاں چار متعلقہ مقداریں 'س'، 'ضہ'، 'ی'، 'فہ' ہیں اور اس لیے ضابطہ ہے

جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س
تفرق کرنے اور س اور ضہ کو مستقل فرض کرنے سے
- جب ی مفی = (جم فہ جب ضہ - جب فہ جم ضہ جم س) مفی
اور مفی فہ کے سر کی بجائے جب ی جم و درج کرنے سے
مفی فہ = - قط و مفی

بلاشبہ اسے مندرجہ صدر ضابطہ (۲) سے راست 'مفی ضہ'، 'مفس' = بنا کر حاصل کیا جاسکتا تھا۔

دوسری مثال میں فرض کرو کہ اختلاف منظری زاویہ عا شامل ہوتا ہے۔ ہم یہ معلوم کریں گے کہ ایک دئے ہوئے ستارہ کا اختلاف منظری زاویہ عایومی حرکت کی آتنا میں کس وقت اعظم ہوتا ہے۔ شرطیں یہ ہیں کہ فہ اور ضہ مستقل ہوں اور س، ی اور و اس طریقہ سے متغیر ہوں کہ عای میں کوئی تبدیلی نہ ہونے پائے یعنی مفی عام معدوم ہونا چاہئے۔ فہ، ضہ، عا، س پر مشتمل ضابطہ یہ ہے

مس فہ جم ضہ = مم عاجب س + جب ضہ جم س
تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(مم عاجب س - جب ضہ جم س) مفی س = -

اور چونکہ مفی س کے سر کو معدوم ہونا چاہئے اس لیے مم عاجب س = جب ضہ مس س جس سے جم و = - اور اس لیے ستارہ اول السمیت پر ہونا چاہئے۔ اس میں ہمیں ان استثنائی صورتوں کی ایک اور مثال ملتی ہے جن میں اگرچہ تین تغیرات صفر ہوتے ہیں لیکن ضابطوں سے یہ لازم نہیں آتا کہ

دوسرے تین تغیر بھی صفر ہوں (واقعہ ۴)۔
یہ تفرقی ضابطے خاص کر یہ دکھانے میں سبق آموز ہیں کہ مشاہدات کو سطح
مرتب کرنا چاہئے کہ اگر چہ اثبات مشاہدہ میں ایک چھوٹی خطا واقع ہوئی ہو
لیکن اس خطا کے وجود سے اس نتیجہ پر کم سے کم اثر ہے جس کی ہمیں تلاش ہے۔
مثلاً فرض کرو کہ طالع اپنا وقت پیا ٹھیک کرنے کی غرض سے سورج کا
سامتی زاویہ معلوم کرنا چاہتا ہے۔ جس چیز کی وہ پیمائش کرتا ہے وہ سورج کا
ارتفاع ہے۔ لیکن انعطاف اور دوسرے اسباب سے جنہیں کوئی تدبیر کلاً
رفع نہیں کر سکتی اس ارتفاع میں ایک چھوٹی خطا واقع ہوگی اور اس لیے اسی
فاصلہ کے محسوب کرنے میں خطا واقع ہوگی۔ مشاہدہ راسی فاصلہ کو ی کے طور پر
پیمائش کر لیتا ہے اور پھر نتیجہ نکالتا ہے کہ سامتی زاویہ اس ہے۔ لیکن صحیح راسی
فاصلہ ی + مف ی ہے یعنی مف ی وہ مقدار ہے جسے مشاہدہ کردہ راسی (۹۵)
فاصلہ میں جمع کرنا ہوگا تاکہ صحیح راسی فاصلہ حاصل ہو۔ اس لیے صحیح سامتی
زاویہ اس نہیں ہے بلکہ قدرے مختلف مقدار اس + مف اس ہے جہاں
مف اس وہ تصحیح ہے جو اس پر استعمال کرنی ہوگی پس مف اس وہ مقدار ہے
جس کی اب تلاش ہے۔

وہ ضابطہ جس میں صرف اجزاء ی، فہ، فہ، اس شامل ہوتے ہیں

یہ ہے

جم ی = جب فہ جب فہ + جم فہ جم فہ

اس کو تفریق کرنے اور فہ اور فہ کو مستقل سمجھنے سے

۔ جب ی مف ی = جم فہ جب فہ جب فہ

اور ۔ جب ی جب ی = جب فہ جب فہ درج کرنے سے

۔ مف ی = جب ی جب فہ مف فہ

اس لیے مف فہ = فہ فہ فہ ی

اس ضابطہ کا ہندسی ثبوت حسب ذیل ہے :-

اگر سورج قطب مش کے گرد (شکل ۳۰) پ سے پ تک

چاہئے۔ پس غلی قاعدہ جس سے ملاح خوب واقف ہوتے ہیں یہ ہے کہ وقت کی تعیین کے لیے سورج کا ارتفاع اس وقت مشاہدہ کیا جائے جبکہ سورج اول سمت پر یا اس کے قریب ہو۔ اگر سورج اول سمت پر نہ آئے تو مف سے کی کم سے کم قیمت قطنہ ہے۔

مثال ۱۔ مف نہ، مف ی، اور مف نہ کے لیے ضابطوں (۱) (۲) (۳) کو حل کر کے معلوم کرو کہ ضابطے (۳) (۵) (۶) کس طرح اخذ کئے جاسکتے ہیں۔

مثال ۲۔ ہندی طور پر ثابت کرو کہ اگر سورج کا مفروضہ میل مف نہ کی حد تک غلط ہو تو سورج کے راسی فاصلہ کے مشاہدے سے ساعتی زاوے کی تعیین میں مفروضہ میل کی خطا سے جو خطا پیدا ہوگی وہ کم عا قطنہ مف نہ ہوگی۔

مثال ۳۔ کن حالات کے تحت یومی حرکت کی باعث دن بھر ایک ستارہ کے راسی فاصلہ کی تبدیلی اس کے ساعتی زاوے کی تبدیلی کے متناسب ہوگی۔

(۲) سے حاصل ہوتا ہے مف ی | مف س = جب و حجم نہ اور یہ مستقل ہونا چاہئے، اس لیے مستقل ہونا چاہئے اور اس لیے مشاہدہ خط استوا پر ہونا چاہئے اور ستارہ ایک استوائی ستارہ ہونا چاہئے۔

مثال ۴۔ اگر معلومہ میل کے کسی جرم فلکی کا راسی فاصلہ مشاہدہ کیا جائے اور اس راسی فاصلہ سے ساعتی زاویہ متعین کیا جائے تو ہندی طور پر ثابت کرو کہ مفروضہ عرض بلد نہ میں ایک چھوٹی خطا مف نہ کی موجودگی ساعتی زاویہ میں کم و قطنہ مف نہ کی خطا پیدا کرے گی یہاں و سمت ہے۔

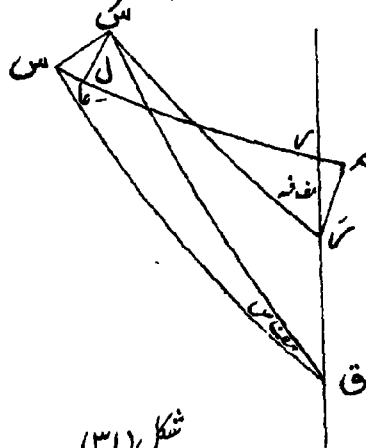
نیز دکھاؤ کہ یہ خطا بالعموم غیر اہم ہوگی بشرطیکہ جرم اول سمت کے نزدیک ہو۔

قطبی فاصلہ ق س (= ۹۰° - نہ) راسی فاصلہ س ر (= ۹۰°) اور عرض التمام ق س (= ۹۰° - نہ) سے مثلث ق س ر حاصل ہوتا ہے۔ (شکل ۳۱) اختلاف منطری زاویہ عا منفی ہے کیونکہ وہ نصف النہار کے مشرق میں ہے۔ (دفعہ ۳۴)۔

قطبی فاصلہ ق س (= ق س) راسی فاصلہ س ر (= س ر) اور عرض التمام ق س (= ۹۰° - نہ) سے مثلث ق س ر حاصل ہوتا ہے۔

س۔ م اور س۔ ل، س۔ م پر عمود کھینچو تو چونکہ س۔ م اور س۔ ل بہت قریب ہیں اس لیے س۔ م = س۔ ل، لیکن چونکہ س۔ م = س۔ م اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہئے س۔ ل = س۔ م۔
 زاویہ س۔ م س۔ ل، سمت لا ہے، اس لیے س۔ ل = س۔ م = جم لا مف فہ
 زاویہ ق س م = عا اور س م = س ل ق (۹۰ + عا)
 = جم لا تم عامف فہ
 لیکن مف س = س ل ق م ق س، اس لیے
 مف س = جم لا ق م ق س تم عامف فہ = مم لا ق م فہ

(۹۷)



شکل (۳۱)

مثال ۵۔ میل ضدہ کے ایک ستارہ کے راسی فاصلے ی، ی، ایسے لمحوں پر مشاہدہ کئے گئے ہیں جن کے درمیان وقفہ ۲۴ ہے۔ بتاؤ کہ عرض القام ج، مساوات

جب $\frac{1}{4}$ ج = جب $\frac{1}{4}$ (ی + لا) جب $\frac{1}{4}$ ط ق م سے معلوم ہو سکتا ہے، جہاں لا، د، ی، ط، ضدہ امدادی زاوے ہیں جو مساوی ہیں
 (۱) مس لا = مم ضدہ جم تہ
 (۲) جب د = جم ضدہ جب تہ

(۳) جیم ی = جیم $\frac{۱}{۲}$ (ی + ی) جیم $\frac{۱}{۲}$ (ی - ی) قطب
 (۴) جب طہ = جب $\frac{۱}{۲}$ (ی + ی) جب $\frac{۱}{۲}$ (ی - ی) قمی قم د
 (۵) مس صہ = جب $\frac{۱}{۲}$ (ی + لا) قم $\frac{۱}{۲}$ (ی - لا) مس $\frac{۱}{۲}$ طہ
 [Math. Trip] سے حاصل ہوتے ہیں۔

مثال ۶۔ اگر قطب تارے (Polaris) کا شمال قطبی فاصلہ
 ف اور ر اسی فاصلہ ی قطب کے نیچے نصف النہار سے ساعتی زاویہ س پر مشاہدہ
 کیے گئے ہوں تو ثابت کرو کہ عرض التمام ع مساواتوں

جب ما = جب ف جب س' مس لا = مس ف جیم س'
 مس' $\frac{۱}{۲}$ (ع + لا) = مس $\frac{۱}{۲}$ (ی + ما) مس $\frac{۱}{۲}$ (ی - ما)
 سے معلوم ہو سکتا ہے۔

امدادی زاویوں لا اور ما کی ہندسی اہمیت کیا ہے؟ [Math. Trip.]
 مثال ۷۔ اگر ایک ستارہ کاسیل ضہ اور اس کا اعظم السمیت ۱ ہو تو
 ثابت کرو کہ اس لمحہ سے جبکہ السمیت ۱ ہے وقت کے ت ثانیوں میں السمیت بقدر
 قوس کے $\frac{۱}{۲}$ ۱۵ ثا جب آ جب ضہ مس (ثانیوں
 کے بدل جائے گا۔

اگر السمیت کی قیمت اعظم ہو تو ستارہ قطب اور راس کے درمیان تنگبند
 کرے گا اور اعظم السمیت کے لیے راسی فاصلہ اس چھوٹی قوس پر محاس ہوتا ہے جو
 ستارہ اپنی ظاہری یومی حرکت میں مرسم کرتا ہے۔

م ۱ = جیم ف مس ضہ قم س - جب ف م س کو تفرق کرنے سے
 حاصل ہوتا ہے

$$\text{قم } ۱ \text{ فرس} = \text{جیم ف مس ضہ قم س م س} - \text{جب ف قم س}$$

$$= \text{م م م م س} - \text{جب ف}$$

$$\text{پھر تفرق کرنے اور فرس} = ۰ \text{ بنانے سے}$$

$$\text{قم}^1 \text{ فر}^2 = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^1} = \text{مم}^1 \text{ قم}^2 \text{ س}$$

$$\text{فر}^2 \text{ س} = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^1} = \text{س}^1 \text{ جب}^2 \text{ س}$$

اور

اس لیے اعظم سمت کی آن سے ت ثانیوں میں سمت کی تبدیلی

لاہو تو

$$\text{جب}^1 \text{ س} = \frac{1}{5} \text{ ت}^2 \text{ جب}^2 \text{ آ جب}^2 \text{ س}^1$$

۳۶۔ کسی جرم فلکی کے تکبید کا وقت۔

بالائی تکبید کے لمحہ پر (دفعہ ۲۹) جرم کا صعود مستقیم کو کبھی وقت ہوتا ہے۔ اس لیے بالائی تکبید کا وقت معلوم کرنے کا مسئلہ اس مسئلہ میں تحویل ہو جاتا ہے کہ اس جرم کا صعود مستقیم اس آن پر معلوم کیا جائے جبکہ وہ نصف النہار کو عبور کرتا ہے۔

ستارے کے بالائی تکبید کا وقت

کسی ستارے کی صورت میں عمل حساب بہت سادہ ہے کیونکہ ظاہری صعود مستقیم بہت سست رفتار سے بدلتا ہے اور اس لیے ہم جدولوں سے دیکھ کر اسے ہمیشہ معلوم کر سکتے ہیں اور پھر بالائی تکبید کا کو کبھی وقت فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہم سماک راج (Areturus) کے مرور کا وقت بتام گرنیج بتاریخ ۱۲ فروری سنہ ۱۹۰۶ء معلوم کرنا چاہتے ہیں جو اس مخصوص مقصد کے لیے ۱۲ فروری کی ظاہری ظہر سے ۱۳ فروری کی ظاہری ظہر تک آسانی سے شمار کیا جاسکتا ہے۔ ایفیمر لیں بابتہ سنہ ۱۹۰۶ء میں ہم دیکھتے ہیں کہ ۱۰ فروری کو بالائی تکبید کے وقت صعود مستقیم ۱۴ گ ۱۱ ۴۲ ۲۲ ث ہے۔ یہ صعود مستقیم ۱۰ دن میں ۲۹ د ث بڑھتا ہے اور اس لیے ۱۲ فروری کو تکبید کے

وقت کی اکائی کے طور پر لو اور یہ فرض کرو کہ تکبید کا وقت کے بعد وقت کی ت اکائیوں پر واقع ہوتا ہے تو بینی اور راج کے ذریعہ تکبید کے وقت صعود مستقیم کے لیے حاصل ہوتا ہے

عم + ت (عم - عم) + $\frac{1}{4}$ ت (ت - ۱) (عم - ۲ عم + عم) یہ جرم کے تکبید کا کوکبی وقت ہوگا۔ فرض کرو کہ وقفہ ت پر کوکبی وقت طہ ہے اور فرض کرو کہ کوکبی وقت میں مذکورہ بالا اکائی کی قیمت ۵ ہے۔ تب تکبید کی آن پر کوکبی وقت ہے

لیکن یہ اُس جملہ کے مساوی ہونا چاہئے جو ابھی اوپر لکھا جا چکا ہے۔ اس لیے

$$طہ + ۵ ت = عم + ت (عم - عم) + \frac{1}{4} ت (ت - ۱) (عم - ۲ عم + عم)$$

اس مساوات سے ت معلوم کرنا ہوگا۔ مساوات دو درجی ہے لیکن ہمارے مطلب کی اہم اصل صریحاً اس واقعہ سے ظاہر ہو جاتی ہے کہ $\frac{1}{4} ت (ت - ۱) (عم - ۲ عم + عم)$ ایک چھوٹی مقدار ہے۔ اس لیے اس مساوات کو حل کرنے میں ہم ت کی بجائے تقریبی قیمت ت مساوات

$$طہ + ۵ ت = عم + ت (عم - عم)$$

کو حل کر کے معلوم کر لیتے ہیں اور پھر ہم اس قیمت ت کو مذکورہ بالا چھوٹی رقم میں داخل کرتے ہیں اور ت کے لیے حسب ذیل مفرد مساوات حل کرتے ہیں

$$طہ + ۵ ت = عم + ت (عم - عم) + \frac{1}{4} ت (ت - ۱) (عم - ۲ عم + عم)$$

کسی سیارہ کے بالائی تکبید کا وقت

متذکرہ صدر عمل کو واضح کرنے کے لیے ہم مشتری (Jupiter) کے تکبید کا

وقت بمقام گرنیچ بتاریخ ۲۵ ستمبر ۱۹۷۶ء محسوب کریں گے۔
بحری جنتری (Nautical almanac) کے صفحہ ۲۳۷ سے ہمیں

حسب ذیل مواد ملتا ہے :-
اوسط ظہر ۲۵ ستمبر ۱۹۷۶ء
مشتری کا صعود مستقیم ۵۳۵۹۳۹ گ

۲۶ - ۲۷
۲۶۵۹۰ + ۲۰۵۹۶۴۰ گ
۲۶۵۲۲ + ۲۶۵۱۴۴۰ گ

۲۷ - ۲۸
۲۶۵۹۰ + ۲۰۵۹۶۴۰ گ
۲۶۵۲۲ + ۲۶۵۱۴۴۰ گ
اس لیے مشتری کا صعود مستقیم ۲۵ ستمبر ۱۹۷۶ء کی ظہر کے ت دن (۱۰۰) بعد یہ ہے

۲۹ گ ۵۳۵۹۳۹ + ۲۶۵۹۰ + ۲۰۵۹۶۴۰ ت (ت-۱)

تکبہ کی آن پر یہ صعود مستقیم کو کبھی وقت کے مساوی ہوتا ہے جو یہ ہے

۱۲ گ ۳۴۵۶۲ + ۲۶۵۹۰ ت [۲۶ گ ۵۳۵۹۳۹]

اس لیے ت کے لیے مساوات حاصل ہوتی ہے

۳۰ گ ۵۳۵۹۳۹ + ۲۶۵۹۰ + ۲۰۵۹۶۴۰ ت (ت-۱)

۱۲ گ ۳۴۵۶۲ + ۲۶۵۹۰ ت [۲۶ گ ۵۳۵۹۳۹]

دائیں جانب کی آخری رقم کو نظر انداز کرنے اور پہلے حل میں سب ثانیوں کو ترک کرنے سے حاصل ہوتا ہے

۱۸ گ ۲۶ = ت (۲۶ گ ۳۴)

اس لیے ت = ۵۷۷۔

ت کی اس تقریبی قیمت کو -۳۴ و ۳ (ت-۱) میں داخل کرنے سے وہ -۶ و ۳ میں تحویل ہو جاتا ہے۔

اس لیے مساوات مندرجہ بالا ہو جاتی ہے

$$\text{گ } ۳۰ \text{ م } ۲۹ \text{ ث } ۵۳ + ۹۰ \text{ ث } ۲۶ = \text{گ } ۱۲ \text{ م } ۱۳ \text{ ث } ۴۲ + ۳۴ \text{ ت} = \text{گ } ۲۲ \text{ م } ۳۵ \text{ ث } ۵۶$$

$$\text{پس } \text{ت} = \frac{\text{گ } ۱۸ \text{ م } ۲۶ \text{ ث } ۱۹}{\text{گ } ۲۲ \text{ م } ۳۵ \text{ ث } ۵۶} = ۰.۶۶۶۶۶۶۶۶$$

اس لیے مشتری کا تکبید ظہر کے بعد اوسط شمسی دن کا -۶۶۶۶۶۶۶۶ ہے

یعنی گ ۱۸ م ۲۳ ث ۳۸ - ۱ - و پر (دیکھو بحری جنتری صفحہ ۱۹۶)

چاند کے بالائی تکبید کا وقت

چاند کی صورت میں حرکت اس قدر تیز ہوتی ہے کہ ساعت بہ ساعت اس کے مقامات جو ایفیمرس سے حاصل ہو سکتے ہیں دیکھنے پڑتے ہیں۔ مثلاً ہم وہ وقت محسوب کریں گے جس پر چاند نے بمقام گرینوچ بتایا ۲۹ اکتوبر نصف النہار کو عبور کیا تھا۔

اس دن اوسط ظہر پر کو کبھی وقت گ ۱۴ م ۲۴ ث ۳۷ ہے (بحری جنتری صفحہ ۱۹۶)۔ چاند کا صعود مستقیم بوقت ظہر (بحری جنتری صفحہ ۱۹۵)

گ ۲۳ م ۲۳ ث ۳۷ ہے۔ اگر چاند میں حرکت نہ ہوتی تو اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ چاند کو شام میں تقریباً دس بجے تکبید کرنا چاہئے۔ دس بجے چاند کا صعود مستقیم تقریباً گ ۲۳ ہے اور اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ظہر اور چاند کے تکبید کے درمیان وقفہ تقریباً کو کبھی وقت کے گ ۱۰ م ۱۶ ہے یا اوسط شمسی

وقت کے گ ۱۴ م ۱۶۔ اس لیے ہم ایفیمرس سے حسب ذیل مواد لیکر چاند کے

تکبید کا وقت معلوم کر لیتے ہیں:-

معدود مستقیم چاند
۲۹ اکتوبر ۱۹۰۹ء گھنٹے ۱۰ گ ۴۲ م ۵۲۵.۳ ش
فرق اول فرق دوم

گھنٹے ۱۱ گ ۴۴ م ۳۸ ش
+ ۵۶۳.۴۰ ش
- ۵.۶ ش

گھنٹے ۱۲ گ ۴۶ م ۴۴ ش
+ ۵۶۳.۳۴ ش

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ظہر کے بعد (۱۰ + ت) گھنٹوں پر چاند کا صعود (۱۰۱) مستقیم ہے

گ ۴۲ م ۵۲۵.۳ ش + ۱۱۶۳.۴۰ ت - ۵.۳ ت (ت - ۱)

چونکہ ت تقریباً $\frac{1}{4}$ ہے اس لیے آخری رقم تقریباً ایک ثانیہ کا حصہ ہے اور اس لیے وہ نظر انداز کی جاسکتی ہے۔ اس لیے ت معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل مساوات ملتی ہے

گ ۴۲ م ۵۲۵.۳ ش + ۱۱۶۳.۴۰ ت

= اوسط وقت گ پر کوئی وقت + ت [گ ۸۶۲.۹ ش]
بائیں جانب ت کا سر ایک اوسط گھنٹے کی کوئی قیمت ہے۔ زیر بحث یوم میں
اوسط ظہر پر کوئی وقت گ ۴۲ م ۳۷۷.۳ ش ہے۔ اگر اس میں ہم گ ۴۲ م ۵۶۲.۳ ش
جمع کریں جو کہ اوسط وقت کے گ کا کوئی معادل ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ
گ ۱۰ - ۱ - و پر کوئی وقت گ ۴۲ م ۹۸.۱۵ ش ہے۔ اس لیے

مساوات بالا ہے

گ ۲۲۰۳۰۳ - گ ۲۹۸۱۵ = ت (گ ۱۰۸۶۱ - ۱۰۵۴۳۰۱) ش

$$ت = \frac{۳۶۵.۵}{۱۳۵۴۲۵۸} = ۰.۲۶۳۳۵۹۴$$

یہ دس بجے شام کے بعد ایک اوسط گھنٹے کی وہ کسر ہے جس پر تکبید واقع ہوتا ہے یعنی تکبید کا وقت گ ۱۰۸۶۱۴ ش ہے (بحری جنتری صفحہ ۱۶۷)

طول بلد لہ پر تکبید کا وقت

فرض کرو کہ کسی جرم فلکی کے بالائی تکبید کا وقت بمقام پ معلوم کرنا مقصود ہے جو طول بلد لہ میں گرینویچ کے مغرب میں واقع ہے۔
تکبید کی آن پر جرم کا صعود مستقیم بلاشبہ اس مقام پر کے کوکبی وقت کے مساوی ہوگا۔ فرض کرو کہ مقامی اوسط وقت ط ہے تو گرینویچ پر اوسط وقت اسی آن پر ط + لہ ہوگا اور اس لیے جرم کے صعود مستقیم کو مبنی اور راج کے ذریعہ ط + لہ کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔
پس ہمیں اوسط وقت ط کے جواب میں صرف پ پر کا کوکبی وقت معلوم کرنا ہے۔ ایفیمرس سے گرینویچ پر اوسط ظہر کے جواب میں کوکبی وقت ملے گا۔ اس میں

$$\frac{لہ}{۲۴} \times (اوسط شمسی اور کوکبی دن کے درمیان فرق کوکبی وقت میں)$$

کا اضافہ کرنا ہوگا تاکہ بمقام گرینویچ اوسط ظہر پر کوکبی وقت حاصل ہو۔ اس میں ط کو بقدر اس نسبت کے بڑھا کر جمع کرنا چاہئے جو اوسط دن کے وقفہ کو کوکبی دن کے وقفہ سے ہے۔ محصلہ کوکبی وقت کو صعود مستقیم کے مساوی رکھنے سے ط معلوم ہو جائیگا۔

مثلاً فرض کرو کہ ہم وہ وقت معلوم کرنا چاہتے ہیں جس پر چاند رصد گاہ

ایک ماؤٹ سطلین کیا لیفورنیا کے نصف النہار کو بتاریخ ۲۵ دسمبر ۱۹۰۶ ع
عبور کرتا ہے۔ اس مقام کا طول بلد ۸ گ ۴۶ ۸۹ ۳۴ ش ہے اور اگر تکبہ کا اوسط
مقامی وقت ملے ہو تو گریونچ اوسط وقت ۸ گ ۴۶ ۸۹ ۳۴ ش + طہ ہے۔

ایلیمرس سے معلوم ہوتا ہے کہ بتاریخ ۲۵ دسمبر ۱۹۰۶ ع گریونچ اوسط
نہر پر کوکبی وقت ۱۸ گ ۱۳ ۱۳ ۱۲ ش ہے اور چاند کا صعود مستقیم ۱۹ گ ۱۲ ۱۴ ۲۹ ش

سے ۲۳ گ پر ۳۲ گ ۳۲ گ ۳۲ گ ۳۲ گ متغیر ہوتا ہے اور یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ
گریونچ پر تکبہ تقریباً ۲۲ گ ۱-۱- و پر واقع ہوتا ہے۔ بعد کے گھنٹوں
میں چاند کے صعود مستقیم میں تقریباً ۵ گ کا اضافہ ہوتا ہے۔ اس لیے ایک
کی رصد گاہ پر تکبہ تقریباً ۸ گ ۳۴ مقامی اوسط وقت پر واقع ہو گا یا تقریباً
۱۶ گ ۳۴ گریونچ اوسط وقت پر۔ پس جدولوں کا وہ حصہ جسے صحیح عمل حساب
میں استعمال کرنا ہو گا حسب ذیل ہے:-

گ ۱-۱- و چاند کا صعود مستقیم فرق اول فرق دوم
۶۹۰۶ دسمبر ۱۶ گھنٹے ۲ گ ۵۰ ۳۵ ۹۱ ش

۱۷ گ ۵۲ ۲۸ ۵۱ ش + ۵۵ ۵۵ ۵۵ ش
۱۸ گ ۵۲ ۲۸ ۹۱ ش + ۵۵ ۶۳ ۵۵ ش

۱۸ گ ۵۲ ۲۸ ۹۱ ش + ۵۵ ۶۳ ۵۵ ش
فرض کرو کہ ۸ گ ۴۶ ۸۹ ۳۴ ش + طہ = ۱۶ گ + ت جہاں ت ایک
گھنٹہ کی کسر ہے۔

تب طہ = گ ۴ ۵۳ ۱۱ ۲۵ + ت

یاب کی رصد گاہ پر مقامی اوسط وقت طہ کے جواب میں کوکبی وقت حسب طریقہ ذیل معلوم کیا جاتا ہے -

کوکبی وقت گرینوچ
اوسط ظہر = گ ۱۸ ۴۲ ۱۳ ۲۱ + ت
بلک کا طول بلد

گ ۱۹ ۴۳ ۱۹ + ت = گ ۲۳ ۵۶ ۵۶ + ت

(گ ۵۳ ۱۱ ۲۵ + ت) کوکبی وقت میں بیان شدہ

گ ۴ ۵۳ ۱۱ ۲۵ + ت = گ ۱۹ ۴۳ ۱۹ + ت

ان تین سفروں کو جمع کرنے سے مقام بلک پر چاند کے بالائی سنگبند کا کوکبی وقت

مائل ہوتا ہے جو = گ ۲۳ ۵۶ ۵۶ + ت = گ ۱۹ ۴۳ ۱۹ + ت

چاند کا مستقیم (۱۶ + ت) گ - ۱ - ۵ پر

گ ۲ ۵۰ ۴۳ ۹۱ + ت = گ ۱۱ ۵۱ ۵۵ + ت = گ ۱۰ ۴۳ ۹۱ + ت (ت - ۱) ہے -

چونکہ تقریباً ۵ گ ہے اس لیے اس جملہ کی تیسری رقم - ۱۰۱ ہے اور ت معلوم کرنے کے لیے مساوات حاصل ہوتی ہے

گ ۲ ۵۰ ۴۳ ۹۱ + ت = گ ۱۱ ۵۱ ۵۵ + ت

گ ۲ ۵۰ ۴۳ ۹۱ + ت = گ ۱۱ ۵۱ ۵۵ + ت

ت = $\frac{۳۵۱۷۸۸ - ۱۰۱ - ۱۰۱ - ۱۰۱}{۱۳۲۲۱۵۸}$ گھنٹے

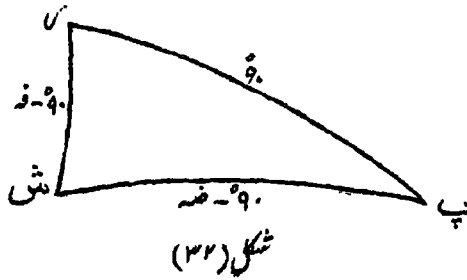
$$۱۵۷ = ۳۳^{\circ}$$

پس بمقام ایک چاند کا تکبیر ۱۶° ۳۳° ۱۵۷° اگرینوچ اوسط وقت

یا ۸° ۳۶° ۲۶° مقامی اوسط وقت پر واقع ہوا۔

۳۷۔ کسی جرم فلکی کا طلوع و غروب۔

کسی جرم فلکی کے طلوع اور غروب ہونے کا وقت بڑی حد تک انعطاف سے متاثر ہوتا ہے۔ ہم انعطاف کے اثر پر کسی آئینہ باب (چھٹے) میں غور کریں گے اور فی الحال اس کو ملتوی کرتے ہیں۔ ہم یہاں وہ ضابطے بیان کریں گے جن سے یہ معلوم ہو گا کہ کوئی جرم فلکی کرہ ہوائی کے اثرات سے قطع نظر کس وقت افق پر یعنی راس سے ۹۰° پر ہوتا ہے۔ شکل (۳۲) میں نقطے مش اور مرا علی الترتیب قطب شمالی اور راس ہیں۔ پ ایک



ستارہ ہے بوقت طلوع یا غروب جبکہ مرا پ = ۹۰° ۔ اس لیے ماہل ہوتا ہے

$$= ۰ \text{ جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم مس}$$

اس لیے جم مس = مس فہ مس ضہ

اس کے بالعموم دو عمل ہوں گے ایک مس (۱۸۰°) جو غروب کے

جواب میں ہوگا اور دوسرا ۲۶۰۔ اس جو طلوع کے جواب میں ہوگا بشرطیکہ ستارہ ایسا ہو کہ مشاہد کے عرض بلد پر طلوع اور غروب ہوتا ہو۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ میل نہ کا کوئی جرم عرض بلد نہ کے مقام پر نہ طلوع ہوگا نہ غروب الا آنکہ مس نہ مس نہ (بالا لحاظ علامت)۔

مثال ۲۔ اگر ایک ستارہ کا شمالی میل ۴۰°، نہ ثابت کرو کہ کو کبھی دن میں گھنٹوں کی ۵۰ تعداد میں ستارہ اس مقام کے افق کے نیچے ہوگا جس کا عرض بلد ۳۰° ہے اور ۳۶° ہے۔

مثال ۳۔ سماک راج کا میل ۹۹°۱۹' میں ۱۹°۳۹' نش ہے اور کیمرج کا عرض بلد ۵۲°۱۳' ہے۔ یہ ستارہ طلوع اور تکبد کے درمیانی وقفہ میں جس ساعتی زاویہ میں سے حرکت کرتا ہے اس کو معلوم کرو۔

مثال ۴۔ فرض کرو کہ ایک ستارہ کے طلوع کا کو کبھی وقت گ اور غروب کا وقت گ ہے اور ستارہ کے محدوہ نہ میں۔ ثابت کرو کہ گ = عہ + سہ اور گ = عہ + سہ جہاں سہ اور سہ مساوات جم سہ =۔ مس نہ مس نہ

کی دو اصلیں ہیں۔

مثال ۵۔ کن حالات کے تحت ایک ستارہ کا سمت طلوع سے تکبہ تک متقل رہے گا۔

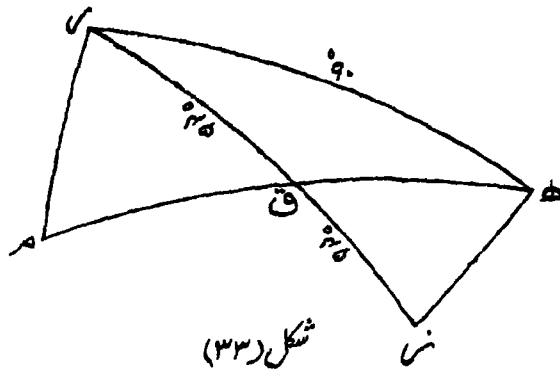
اگر ستارہ کا سمت مستقل ہے تو اسے اس میں سے گزرنے والے ایک بڑے دائرہ پر حرکت کرنا چاہئے۔ اس لیے ستارہ سماوی خط استواء پر ہونا چاہئے اور قطب مشاہد کے افق پر ہونا چاہئے یعنی مشاہد ارضی خط استواء پر ہونا چاہئے۔

مثال ۶۔ اگر عرض بلد نہ اور ایک جرم فلکی کا میل نہ، اور اس اس کا وہ ساعتی زاویہ ہو جو وقت طلوع یا غروب حاصل ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ س} = \text{قط نہ قط نہ جم} (نہ + نہ)$$

جبکہ انعطاف کے اثر کو نظر انداز کر دیا گیا ہو۔

مثال ۷۔ ثابت کرو کہ عرض بلد ۵۴° میں وہ وقفہ مستقل ہے جو کسی ستارہ کے مشرقی سمت میں سے گزرنیکے وقت اور اس کے مغرب کے وقت کے درمیان ہوتا ہے۔
فرض کرو کہ ستارہ کا محل جبکہ وہ مشرقی سمت میں ہو رہا ہے اور فرض کرو کہ اس کا اور قطب ق ہے (شکل ۳۳)۔ تب زاویہ ہر ساق = ۹۰°
ساق = ۵۴°۔ ساق کو نہایت تک اس طرح خارج کرو کہ ق ن = ۵۴° اور فرض کرو کہ کھ (= ۹۰°) مق محدودہ کو ہر قطع کرتا ہے۔



چونکہ سنہ = ۹۰ = اس لیے زاویہ سنہ = ۹۰ اور اس لیے
 مثلثات سرقہ اور سرقہ میں سرقہ = قنہ اور مرقہ
 = ۹۰ = سرقہ۔ اس لیے یہ مثلث مساوی ہیں اور مرقہ = ۹۰
 اور چونکہ ۹۰ اس سے ۹۰ پر ہے اس لیے وہ ستارہ کے غروب کا محل ہے
 پس ستارہ ۹۰ سے ۹۰ تک نصف کو کبھی یوم میں حرکت کرتا ہے۔

مثال ۸۔ دو ستارے جن کے میل ضم، ضم میں مشاہدہ کئے گئے تو معلوم ہوا کہ وہ ایک ہی وقت پر مشرق میں ہوتے ہیں اور نیز ایک ہی وقت پر غروب ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مشاہدہ کے مقام کا عرض بلد ۵۴° ہے اور اگر ستاروں کے طلوع کے وقتوں کے درمیان گھنٹوں کی تعداد ہو تو

$$۲ \text{ جم} = \frac{۵۰ \times ۵}{۳} = (۱+۱ \text{ مس ضم}) + (۱+۱ \text{ مس ضم}) + (۱-۱ \text{ مس ضم})$$

قطب سے اُس بڑے دائرہ پر عمود کھینچو جو ان دو ستاروں کو ملاتا ہے۔
اس عمود کا طول یونی حرکت سے متاثر نہیں ہوتا اور اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ
قطب اول السمیت اور افق سے مساوی فاصلہ پر ہے یعنی اُس مقام کا عرض بلد
۴۵ ہے۔

نیز وہ وقت جس کے اثناء میں ستارہ افق کے اوپر رہتا ہے غروب کے
وقت ستارہ کے ساعتی زاویہ کا دگنہ ہے یعنی
۲ جم - (۱ مس فہ مس ضم)

ہے۔

اب چونکہ ستارے ایک ساتھ غروب ہوتے ہیں اور فہ = ۴۵ ایسے
ان کے طلوع کے وقتوں کے درمیان وقفہ
۲ جم - (۱ مس ضم) - ۲ جم - (۱ مس ضم)
ہے۔ اس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

مثال ۹۔ اگر دو ستارے جن کے محدود علی الترتیب عہ ۱۰ و عہ ۲۰
عہ ۱۰ ہیں ایک ہی لمحہ پر عرض بلد فہ کے ایک مقام پر طلوع ہوں تو ثابت کرو
جبا (عہ - عہ) = عہ ۱۰ فہ = مس ۱۰ فہ + مس ۱۰ فہ - ۲ مس ۱۰ فہ = مس ۱۰ فہ (عہ - عہ)
مثال ۱۰۔ اگر کرۂ سماوی کا رقبہ ۱ ہو تو ثابت کرو کہ کسی عرض بلد
فہ میں رہنے والے مشاہد کے لیے ایک حصہ (جبا ۱ فہ) میں کے ستارے
کبھی بھی اُس کے افق کے اوپر نہیں ہوں گے دوسرے حصہ (جبا ۱ فہ
میں کے ستارے ہمیشہ اس کے افق کے اوپر ہوں گے حصہ ۱ جم فہ میں کے
ستارے روزانہ طلوع و غروب ہوں گے اور حصہ (جم ۱ فہ) میں وہ سب
ستارے آجائیں گے جن سے وہ واقف ہو سکتا ہے۔

اگر ایک کرۂ کا نصف قطر ۱ ہو تو اس کا وہ رقبہ جو نصف قطر فہ کے
ایک چھوٹے دائرہ سے منقطع ہوتا ہے ۲۲ ۱ (۱-جم فہ) ہے۔ شمالی اور

جنوبی قطبوں کے گرد نصف قطر فہ کے چھوٹے دائرے کوہ کے وہ حصے قطع کریں گے جو علی الترتیب ہمیشہ افق کے اوپر اور ہمیشہ افق کے نیچے رہیں گے۔
مثال ۱۱۔ ایک مقام پر جس کا شمالی عرض بلد فہ ہے دو ستارے جن کے نش۔ قی۔ ف (شمال قطبی فاصلے) علی الترتیب ف اور ف ہیں ایک ساتھ طلوع ہوتے ہیں اور پہلا ستارہ نصف النہار پر اس وقت آتا ہے جبکہ دوسرا غروب ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ

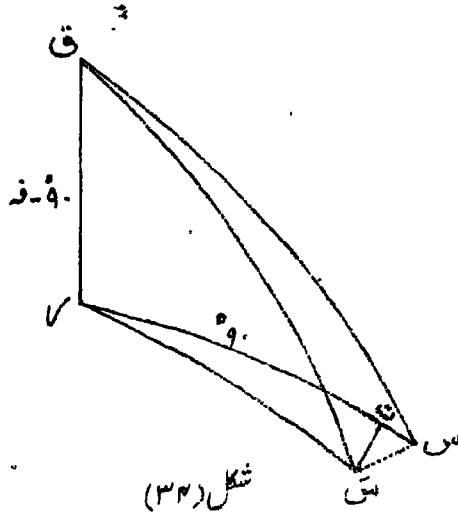
$$\frac{\text{مس فہ}}{\text{مس ف}} = ۱ - \frac{\text{مس افہ}}{\text{مس اف}}$$

یہ ظاہر ہے کہ اگر دوسرے ستارے کا ساعتی زاویہ بوقت طلوع سے ہو تو پہلے ستارہ کا ساعتی زاویہ ۲ س ہونا چاہئے، اس لیے
 = جم ف جب فہ + جب ف جم فہ جم ۲ س
 = جم ف جب فہ + جب ف جم فہ جم س
 ان مساواتوں سے س کو ساقط کریں تو مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔
مثال ۱۲۔ اگر کسی آن پر فو کو کے رفاص کا اہتزازی مستوی ایک ستارہ میں سے گزرے جو افق کے قریب ہو تو ثابت کرو کہ جب تک یہ ستارہ افق کے قریب رہے گا اہتزازی مستوی ستارہ میں سے گزرتا رہے گا۔

فو کو کے رفاص کا مستوی انتصابی کے گرد ایک ایسی زاوی رفاص سے گردش کرتا نظر آتا ہے جو کہ سماوی کی زاوی رفاص کو عرض بلد کی جیب سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔ وقت کے چھوٹے وقفہ فرت میں ستارہ مس (شکل ۳۴) قوس مس مس پر مس تک حرکت کرتا ہے جہاں (۱۰۶)
 مس مس = جم فہ فرت۔ اگر مس مس پر مس مس ت عمود ہو تو

مس ت = مس مس جب مس مس ت = جم فہ فرت = جب فہ فرت

اس لیے مس مس = جب فہ فرت



شکل (۳۴)

۳۸۔ سماوی عرض بلد اور طول بلد۔ بعض خاص قسم کی تحقیقات

میں کروی سماوی پر محدودوں کے ایک اور نظام کو استعمال کرنا پڑتا ہے۔ جس طرح خط استوا سے وہ ذرائع پیدا ہوتے ہیں جن سے کسی ستارہ کے صعودیہ مستقیم اور میل کی تعریف نکل میں آتی ہے عین اسی طرح طریق الشمس کو محدودوں کے ایک نظام کی اساس قرار دیا جاتا ہے، یہ محدود سماوی طول بلد اور عرض بلد کے نام سے مشہور ہیں۔ اس النحل کا نقطہ γ وہ مبدا ہے جہاں سے طول بلد کی پیمائش عمل میں آتی ہے اور پیمائش کی سمت وہ رکھی جاتی ہے جو طریق الشمس پر سورج کی ظاہری سالانہ حرکت کی ہے جیسا کہ شکل (۳۵) میں ایک تیر کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

طریق الشمس کے شطب کے سے ایک بڑا دائرہ ستارہ γ میں سے گذرتا ہوا کھینچا جاتا ہے اور اس بڑے دائرہ کا متقاطعہ γ جس جو ستارہ اور طریق الشمس کے درمیان ہے وہ محدود ہے جسے ستارہ کا عرض بلد کہتے ہیں۔ یہ عرض بلد مشبہت ہوگا اگر ستارہ اس نیم کرہ میں واقع ہو جس میں طریق الشمس کا شطب ہے اور منفی ہوگا اگر ستارہ اس نیم کرہ میں واقع ہو جس میں طریق الشمس کا

فید شطب ہے۔ مبداء ۲ سے عمود کے پائین تک طریقی الشمس کی جو قوس ہے اُسے ستارہ کا طول بلد کہتے ہیں جو وہ سرآمد دیے۔ اس کو (۱۰۶) طریقی الشمس پر ۹۰ سے ۶۰ تک ناپا جاتا ہے، اس طرح اگر طریقی الشمس کسی جرم کا صعود مستقیم بڑھ جائے تو اس کا طول بلد بھی بڑھ جاتا ہے۔

ہم بلاشبہ اس امر کا مشاہدہ کریں گے کہ لفظوں عرض بلد اور طول بلد کے معنی جو یہاں پیشی مفہوم میں سمجھائے گئے ہیں ان الفاظ کے ان معنوں سے بالکل مختلف ہیں جو ارضی معاملات کے لحاظ سے بالعموم مستعمل ہیں۔ پیشی عرض بلد کو یہ سے اور پیشی طول بلد کو لہ سے بالعموم تعبیر کیا جاتا ہے۔ پس ۲ ت = لہ اور ۳ ت = لہ

دائرہ انقلابین کی قوس لہ جو خط استواء اور طریقی الشمس کے درمیان منقطع ہوتی ہے طریقی الشمس کے میلان کے مساوی ہے۔

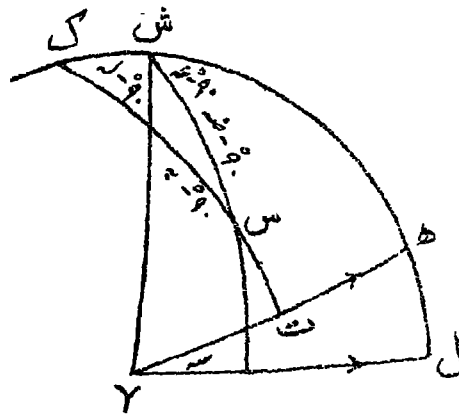
اگر لہ کا صعود مستقیم ع اور میل ضہ ہو تو استحالہ کے ضابطے دفعہ ۱۲ کے عام ضابطوں سے حاصل ہو سکتے ہیں یا راست مثلث لہ گش سے (شکل ۳۵) اور عرض بلد اور طول بلد کی تعین کے لیے ہمیں حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں :-

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جب بہ} = \text{جم} \text{ سے جب ضہ} - \text{جب سے جم ضہ جب عہ} \\ \text{جم بہ جب لہ} = \text{جب سے جب ضہ} + \text{جم سے جم ضہ جب عہ} \dots (۱) \\ \text{جم بہ جب لہ} = \text{جم ضہ جب عہ} \end{array} \right.$$

ان مساواتوں سے ہم بہ اور لہ معلوم کر سکتے ہیں جبکہ عہ اور ضہ دئے گئے ہوں۔ مسئلہ کی نوعیت سے بالعموم یہ معلوم کر لینا آسان ہوگا کہ طول بلد ۸۰ سے بڑا ہے یا چھوٹا۔ جب یہ معلوم ہو جائے تو آخری دو مساواتوں میں سے کسی ایک کو خارج کر سکتے ہیں۔

ہم لو کار تہی عمل کے لیے ان مساواتوں کو ایک امدادی مقدار

(۱۰۱) م = زاویہ س ۲ ل کے اذخالی سے زیادہ سہولت بخش بنا سکتے ہیں
اس طرح مس م = ق م عہ مس ضہ (دفعہ ۱۳) اور



شکل (۳۵)

جب ب = جب ضہ جب (م-س) ق م م
جم ب جب لہ = جب ضہ جم (م-س) ق م م

جم ب جم لہ = جم ضہ جم عہ
مسواتوں کی شکل سے یہ ظاہر ہے کہ م کی اختیار کردہ قیمت کو
بقدر ۱۸۰ کے تبدیل کرنے سے نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔

اگر ہم ک ش کے مجازی س پر جو زاویہ بنتا ہے اس کو
۹۰- ع سے تعبیر کریں تو ڈالبر کے ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} \text{جم } \frac{1}{p} (ل + ع) \text{ جم } (\frac{1}{p} - ۲۵) \text{ ب} &= \text{جم } \left\{ \frac{1}{p} - ۲۵ \right\} (ضہ + س) \text{ جم } (\frac{1}{p} + ۲۵) \text{ ع} \\ \text{مب } \frac{1}{p} (ل + ع) \text{ جم } (\frac{1}{p} - ۲۵) \text{ ب} &= \text{جم } \left\{ \frac{1}{p} - ۲۵ \right\} (ضہ - س) \text{ جب } (\frac{1}{p} + ۲۵) \text{ ع} \\ \text{جب } \frac{1}{p} (ل - ع) \text{ جب } (\frac{1}{p} - ۲۵) \text{ ب} &= \text{جب } \left\{ \frac{1}{p} - ۲۵ \right\} (ضہ + س) \text{ جم } (\frac{1}{p} + ۲۵) \text{ ع} \\ \text{جم } \frac{1}{p} (ل - ع) \text{ جب } (\frac{1}{p} - ۲۵) \text{ ب} &= \text{جب } \left\{ \frac{1}{p} - ۲۵ \right\} (ضہ - س) \text{ جب } (\frac{1}{p} + ۲۵) \text{ ع} \end{aligned}$$

ان مساواتوں سے لہ اور بہ اور نیز ح متعین کئے جاسکتے ہیں۔
اگر اس کا معکوس مسئلہ حل کرنا ہو یعنی اگر صعود مستقیم اور میل معلوم کرنا
ہو جبکہ طول بلد اور عرض بلد دئے گئے ہوں تو (۱) کے احتمال سے حاصل ہوتا ہے

$$\left. \begin{aligned} \text{جب ضہ} &= \text{جم} \text{ سے جب بہ} + \text{جب سے جم بہ جب لہ} \\ \text{جم ضہ جب عہ} &= \text{جب سے جب بہ} + \text{جم سے جم بہ جب لہ} \dots (۲) \\ \text{جم ضہ جب عہ} &= \text{جم بہ جب لہ} \end{aligned} \right\}$$

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ طریق الشمس کے شطب کا صعود مستقیم اور میل
علی الترتیب ۲۰° اور ۹۰°۔ یہ ہیں اور یہ کہ ضد شطب کا صعود مستقیم اور میل ۹۰°
اور ۰° ہیں۔

مثال ۲۔ اگر طریق الشمس کے اس نقطہ کا صعود مستقیم اور
میل عہ، ضہ ہوں جس کا طول بلد لہ ہے تو ثابت کرو کہ
جم لہ = جم عہ جم ضہ
جب لہ جب سہ = جب ضہ

مثال ۳۔ اگر دو ستاروں کے صعود مستقیم اور میل علی الترتیب
عہ، ضہ اور عہ، ضہ ہوں اور ان کا طول بلد ایک ہی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب (عہ - عہ)} = \text{مس سہ (مس ضہ جم عہ - مس ضہ جم عہ)}$$

مثال ۴۔ جبار (عہ) (a Orionis) کا صعود مستقیم ۵۹° ۴۴' اور اس کا میل + ۲۳° ۲۰' ہے اور طریق الشمس کا میلان ۲۳° ۲۰' ہے۔ ثابت
کرو کہ اس ستارہ کا طول بلد اور عرض بلد علی الترتیب ۸۰° ۱۰' اور ۱۶° ۱۶' ہیں

مثال ۵۔ اگر عہ = ۶۳° ۳۳' ۶" ضہ = ۱۶° ۲۲' ۳۵" اور
سہ = ۲۳° ۲۰' ۳۲' تو ثابت کرو کہ

$$\text{لہ} = ۳۵۹° ۱۰' ۴۴" = ۱۰۰° ۳۵' ۳۰"$$

پانچویں باب مختلف مثالیں

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ زمین کے شمالی قطب پر رہنے والے مشاہد کے لیے کسی ستارہ کا ارتفاع اس کا میل ہوگا اور وہ یومی حرکت سے غیر متغیر رہے گا۔ نیز اسی صورت میں ثابت کرو کہ کسی ستارہ کا سمت (جو کسی ثابت نصف النہار سے ناپا گیا ہو) اس کے صعود مستقیم سے صرف بقدر ایک قوس کے فرق رکھے گا جو کسی دن ہونے لمحہ پر سب ستاروں کے لیے وہی ہوگی۔

مثال ۲۔ صعود مستقیم عم اور میل ضہ کے ایک ستارہ کا عرض بلد بہ چھوٹا ہے۔ ثابت کرو کہ سورج کا طول بلد جبکہ اس کا صعود مستقیم عم ہو ستارہ کے طول بلد سے بقدر یہ جب ضہ عم (تقریباً) کے فرق رکھتا ہے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ منطقہ بارہ شمالی یا منطقہ بارہ جنوبی کے اندر کسی مقام کے لیے افق اور طرب (یعنی الشمس کے نقاط تقاطع ایک کو کسی یوم میں افق کے گرد پوری گردش کرتے ہیں لیکن کسی دوسرے مقام کے لیے یہ نقطے مشرق اور مغرب کے نقطوں کے گرد اہتمزاد کرتے ہیں۔

مثال ۴۔ مشرق کے نقطہ کو م سے، قطب کو ق سے اور دو ستاروں کے مقامات کو (ا اور ب سے تعبیر کیا گیا ہے۔ ق (ا و ب سے ا پر ملتا ہے اور ق ب، م سے ا سے ب پر ملتا ہے۔ (ا ب (ا ب کے میل علی الترتیب ضم، ضم، ضم، ضم ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس ضم مس ضم} = \text{مس ضم مس ضم}$$

فرض کرو کہ م (ا اور م ب، نصف النہار کو قطب سے علی الترتیب فاصلوں لہ، م پر قطع کرتے ہیں۔ اب چونکہ م، نصف النہار کا قطب ہے اس لیے مس لہ مس م = مس ضم مس ضم اور مس م لہ = مس ضم مس ضم

مثال ۵۔ اگر مقام پ پر ایک ستارہ کا راسی فاصلہ ی ہو تو اسی آن ایک دوسرے مقام پ پر جو پ سے چھوٹے فاصلہ ف پر واقع ہے اس ستارہ کا راسی فاصلہ ی ہوگا جہاں

ی = ی - ف جم طه + $\frac{1}{4}$ ف ا جب ا مم ی جب طه

جس میں طہ وہ فرق ہے جو ستارہ اور پ کے سمتوں کے درمیان ہے
 جبکہ انہیں پ سے دیکھا جاتا ہے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ θ ۔ θ اور ϕ دونوں قوس میں بیان کئے گئے ہیں، اس لیے نیم قطری زاویوں میں ان کے ناپ علی الترتیب (θ, ϕ) x جب θ اور ϕ جب θ ہیں۔ پس

جم ی = جم ی جم ف + جب ی جب ف جم طه

$$= \text{حمی (۱-۱/۴ ف'جب'أ)} + \text{فجب'أجب'ی حم طه}$$

لیکن

جم ی = جم (ی-ی) جم ی - جب (ی-ی) جب ی

= مجموعی { ۱- ۱/۲ (ی-ی) جب ۱ } - (ی-ی) جب ۱

جمعی کی این دو قیمتوں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

سۛی = ف ج م طه + $\frac{1}{4}$ ف ج ب ا مم ی - $\frac{1}{4}$ (سۛی) ج ب ا مم ی

پہلے تقرب کے طور پر ی۔ ی۔ = ف حجم ملے ہوتا ہے اور آخری رقم میں اس کو درج کرتے سے مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

مثال ۶۔ فرض کرو کہ افق پر کے ایک نقطہ کا سمت 'میل' اور اختلاف منظری زاویہ علی الترتیب α' , β' , γ' ، δ' ، ϵ' ، ζ' ، η' ، θ' ، ι' ، κ' ، λ' ، μ' ، ν' ، ξ' ، \omicron' ، π' ، ρ' ، σ' ، τ' ، υ' ، ϕ' ، χ' ، ψ' ، ω' ثابت کرو کہ دے ہوئے

عرض بلدہ کے لیے یہ مقداریں حسب ذیل ضابطوں کے ذریعہ کسی ساعتی زاویہ (۱۱۰)

س کے لیے محسوب کی جاسکتی ہیں :-
 مس ضہ = مم نہ جم س، جب ا = جب س جم ضہ، جم ا = قط نہ جب ضہ
 مس ا = جب نہ مس س، جم عا = جب نہ قط ضہ، جب عا = جب س جم نہ
 مثال ۷ - اگر ایک ستارہ کا میل اور ساعتی زاویہ علی الترتیب ضہ، س
 ہوں تو حسب ذیل ضابطے حاصل کر دیجیں سے اس کا سمت ا اور اسی فاصلہ
 ی آسانی سے معلوم ہو سکیں جیسا کہ عرض بلد نہ کے لیے ا، ضہ، عا (حسب تعریف
 مندرجہ مثال سابق) کی قیمتیں ساعتی زاویہ س کے جواب میں معلوم ہوں -

جم ی = جب (ضہ - نہ) جم عا
 جب (ا - ا) جب ی = جب (ضہ - نہ) جب عا
 جم (ا - ا) جب ی = جم (ضہ - نہ) جم

مثال ۸ - پچھلے مثال میں مستطیل مقداروں کو لیکر ثابت کرو کہ ستارہ
 کا اختلاف منطری زاویہ عا معلوم کر سکتے ہیں۔
 جب عا = جب (ا - ا) جم (ضہ - نہ)
 جم عا = مم عا مم (ضہ - نہ)

مثال ۹ - مسئلہ ۶ اور ۷ کے ضابطوں کی مثال کے طور پر پاک لائح
 کا اسی فاصلہ اور سمت ساعتی زاویہ ۲۵۳ پر معلوم کرو جبکہ یہ دیا گیا ہو کہ
 میل + ۱۹۴ اور عرض بلد ۵۲۱۳ ہے -

مثال ۱۰ - بتاؤ کہ قطبی ستارہ کے ارتفاع ا کا مشاہدہ کرنے سے
 جس کا ساعتی زاویہ مشاہدہ کے وقت س اور قطبی فاصلہ ق ہے عرض بلد نہ کو
 متعین کیا جاسکتا ہے اور یہ کہ عرض بلد معلوم کرنے کا ضابطہ تقریبی طور پر حسب ذیل ہے

$$نہ = ا - ق جم س + \frac{۱}{۴} جب ا ق جب س س ا$$

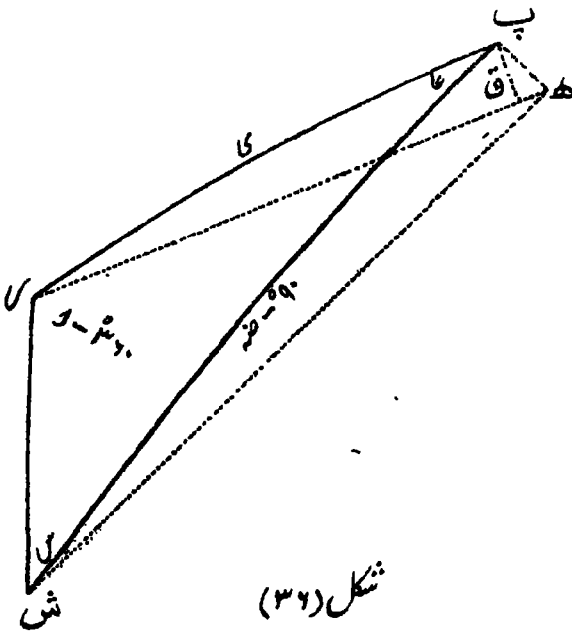
مثال ۱۱ - بتاؤ کہ ایک ستارہ کے ساعتی زاویہ س یا اسی فاصلہ
 ی کو جبکہ وہ مشرقی سمت یا مغربی سمت پر ہو مساواتوں
 جب ضہ = جب نہ جم ی، جب س جم ضہ = جب ی، جم س جم ضہ = جم نہ جم ی

سے معلوم کر سکتے ہیں پہلی صورت میں اوپر کی علامت اور دوسری صورت میں نیچے کی علامت استعمال کی جائے۔

مثال ۱۲۔ کسی ستارہ کے راسی فاصلہ ی کا پہلا اور دوسرا تفرقی سر بلحاظ ساعتی نزاد یہ س معلوم کرو۔

ہم اس کی تحقیق اس سی ضابطوں سے یا ہندسی طور پر حسب ذیل کر سکتے ہیں (شکل ۳۶)۔ فرض کرو کہ قطب شمالی 'ش' راس سر اور ستارہ 'پ' ہے۔ وقت فرس میں ستارہ 'ھ' تک حرکت کر چکا ہو گا جہاں 'پ' 'ھ' 'ش' 'پ' اور 'ش' 'ھ' پر عمود ہے۔ اگر 'پ' 'ق' 'س' 'ھ' پر عمود ہو تو فری = ھ ق = ھ پ جب عا = جم ضہ جب عا فرس = جم ضہ جب ا فرس

نیز فر ا = پ ق ق ق م ی = پ ھ جم عا ق م ی = جم ضہ جم عا ق م ی فرس اس لیے



شکل (۳۶)

(۱۱۱) دوسرا تفرقی سر معلوم کرنے کے لیے ہم $\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$ کو جو اوپر حاصل ہو چکا ہے اس کے لحاظ سے تفرقی کرتے ہیں اور یہ فرض کرتے ہیں کہ $\frac{1}{2}$ اور اس دونوں نیم قطری زاویوں میں بیٹا ہوئے ہیں۔ اس طرح

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرس}} = \frac{\text{جم نہ جم } \frac{1}{2} \text{ فری}}{\text{فرس}}$$

= $\frac{\text{جم نہ جم } \frac{1}{2} \text{ جم نہ جم عا ق م ی}}{\text{فرس}}$
 مثال ۱۳۔ اگر ایک ستارہ کا میل 'عرض بلد سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ راسی فاصلہ میں یومی حرکت کی باعث جو تبدیلی ہوتی ہے اس کی تیز ترین شرح 'میل کی جیب التمام کے مساوی ہے۔ اگر نیل عرض بلد سے کم ہو تو ثابت کرو کہ راسی فاصلہ میں تبدیلی کی تیز ترین شرح عرض بلد کی جیب التمام کے مساوی ہے۔
 مثال ۱۴۔ اگر ایک جرم کا راسی فاصلہ ساعتی زاویہ $\frac{1}{2}$ سا پر ہی ہو اور اس کا راسی فاصلہ ساعتی زاویہ $\frac{1}{2}$ سا پر ہی ہو جہاں س، سے بہت قریب ہے تو مثال ۱۲ سے ثابت کرو کہ

ی۔ ی۔ = ۱۵ (س۔ س) جم نہ جب $\frac{1}{2}$ - ۲۲۵ x $\frac{1}{4}$ جب (س۔ س) جم نہ جم $\frac{1}{2}$ جم نہ جم عا ق م ی جس میں راسی فاصلہ قوس میں اور ساعتی زاویے وقت میں بیان کئے گئے ہیں۔
 مثال ۱۵۔ متواتر ساعتی زاویوں س، س، س، ... میں س، پر جو بہت قریب قریب ہیں ایک ہی ستارہ کے راسی فاصلوں ی، ی، ی، ... کا ایک سلسلہ حاصل کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ راسی فاصلوں اور ساعتی زاویوں کے حسابی اوسط ی، س، ہیں۔ ثابت کرو کہ س، کے جواب میں ی کی قیمت ی، اس طور پر حاصل ہوتی ہے کہ ی، پر تصحیح

$$+ \frac{1}{2} \times ۲۲۵ \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ جم نہ جم } \frac{1}{2} \text{ جم نہ جم عا ق م ی } \frac{1}{2} \text{ (س۔ س) عمل میں لائی جائے۔}$$

دکو ۱ = جم فہ جب ۱ ب = $\frac{1}{4} \times 225$ جب اجم فہ جم اجم فہ جم عاقمری (۱۱۲)
تو آخری مساوات (مثال ۱۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$۱ = ی + ا (س - س) + ب (س - س) \quad ۲$$

$$۱ = ی + ا (س - س) + ب (س - س) \quad ۲$$

.....

.....

$$۱ = ی + ا (س - س) + ب (س - س) \quad ۲$$

جمع کرنے اور ن سے تقسیم کرنے پر

$$۱ = ی + \frac{۱}{۴} ب \quad ۲ (س - س)$$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

یہ ضابطہ اُس وقت مفید ہوتا ہے جبکہ براسی فاصلوں کے ایک سلسلہ سے جو بہت جلد متواتر مشاہدہ کئے گئے ہوں بہترین نتیجہ حاصل کرنا مقصود ہو۔
مثال ۱۶۔ اگر میل فہ کے ایک ستارہ کا سمتی زاویہ میں ہو جبکہ اس کا سمت ۱ ہے اور میں ہو جبکہ اس کا سمت ۱۸۰ ہے تو ثابت کرو کہ عرض بلدہ مساوات

$$\text{مس فہ} = \text{مس فہ} \frac{\text{جم} \frac{1}{4} (س + س)}{\text{جم} \frac{1}{4} (س - س)}$$

سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مثال ۱۷۔ شمالی عرض بلدہ ۴۵° میں ایک حائط قطبی ستارہ کا بڑے بڑا سمت افق کے شمالی نقطہ سے ۴۵° حاصل ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس ستارہ کا قطبی فاصلہ ۳۰° ہے۔

مثال ۱۸۔ بتاؤ کہ مقامی کو کبھی وقت کا مشاہدہ کرنے سے جبکہ دو معلومہ ستاروں کا سمت ایک ہی ہو عرض بلد کس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔ وہ سمتی زاوے س، س جن پر ان دو ستاروں کا سمت ہے

معلوم ہیں اور (صفحہ ۴) $\text{م} \wedge \text{ج ب س} = - \text{ج م فہ مس ضہ} + \text{ج ب فہ جم س}$
 $\text{م} \wedge \text{ج ب س} = - \text{ج م فہ مس ضہ} + \text{ج ب فہ جم س}$
 پس اسقاط کرنے پر

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{مس ضہ ج ب س} - \text{مس ضہ ج ب س}}{\text{ج ب (س - س)}}$$

مثال ۱۹۔ سورج کے دو ارتفاع بہ اور بہ + مف بہ ایکسا دو قریب کے مقامات سے جو ایک ہی نصف النہار پر ہیں اُس وقت مشاہدہ کئے گئے جبکہ سورج کا میل ضہ ہے۔ اگر ان میں سے ایک مقام کا عرض بلد فہ ہو تو ثابت کرو کہ ان کے عرض بلدوں کا فرق تقریباً $\text{مف بہ جم بہ جم فہ} \wedge \text{ج ب ضہ} - \text{ج ب بہ ج ب فہ}$ ہے۔

[Coll. Exam.]

مثال ۲۰۔ ثابت کرو کہ اگر اول سمت میں سورج کا ارتفاع عہ ہو، اس کا طول بلد ل اور طریق الشمس کا میلان سہ تو مقام کا عرض بلد حسب ذیل ہوگا

$$\text{ج ب}^1 \wedge \text{ج ب سہ ج ب ل} \wedge \text{ج ب عہ}$$

مثال ۲۱۔ عرض بلد فہ کس طرح ٹھیک طور پر معلوم کیا جاسکتا ہے اگر معلومہ میل ضہ کے ایک جرم کا داسی فاصلہ اُس وقت مشاہدہ کیا جائے جبکہ وہ نصف النہار سے قریب ہو۔ فہ کی ایک تقریبی قیمت فہ = ی + ضہ مان لی گئی ہے۔

$$\text{اساسی ضابطہ} \quad \text{جم ی} = \text{ج ب فہ ج ب ضہ} + \text{جم فہ جم ضہ جم س}$$

$$= \text{جم (فہ - ضہ)} - \text{ج ب}^2 \wedge \text{س جم فہ جم ضہ}$$

سے حاصل ہوتا ہے

جب $\frac{1}{p}$ (ی + ض - ذ) جب $\frac{1}{p}$ (ی - ض + ذ) = جم ضد جم ضد مبد $\frac{1}{p}$ اس
 جس میں سامعی زاویہ س ، مقامی کو کبی وقت و جرم کے صدو ستقیم سے معلوم
 ہو سکتا ہے - اگر جم لا = ی + ض - ذ - جم تو

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ لا} = \frac{\text{جم ضد جم ضد}}{\text{جب (ذ - ض + ذ) مبد } \frac{1}{p} \text{ اس}}$$

لیکن جرم چونکہ نصف ہذا کے قریب ہے اس لیے لا چھوٹا ہے اس لیے
 تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے (ذ - ض + ذ) مبد $\frac{1}{p}$ اس

$$\text{لا} = \frac{\text{جم ضد جم ضد}}{\text{جب (ذ - ض + ذ) مبد } \frac{1}{p} \text{ اس}} \quad \text{جم ضد جم ضد}$$

یا عا = $\frac{\text{جم ضد جم ضد}}{\text{جب (ذ - ض + ذ) مبد } \frac{1}{p} \text{ اس}}$ سے اور یہ دیکھتے سے کہ عا لا
 سے بہت قریب ہے پس حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{جم ضد جم ضد}}{\text{جب (ذ - ض + ذ) مبد } \frac{1}{p} \text{ اس}}$$

جس سے ذ - ض + ذ = لا

مثال ۱۰ - اگر کسی جرم کو کسی مقام پر رکھا جائے اور اس کے سامنے کسی
 اور عرض لیا جائے کہ وہاں سے اس جرم کا سامنے کا رخ ہو گا اور وہ جرم
 زمین کے مرکز سے کسی مقام پر رکھا جائے گا اور اس کے سامنے کا رخ ہو گا
 ہوا وہ جرم جو جیسے کہ اس جرم کے سامنے کا رخ ہو گا اور اس کے سامنے کا رخ ہو گا
 کے متعلق اس میں لا پڑے گا اور اس کے سامنے کا رخ ہو گا اور اس کے سامنے کا رخ ہو گا
 نقطہ کی جانب جس کا صدو ستقیم ہے اور اس کے سامنے کا رخ ہو گا اور اس کے سامنے کا رخ ہو گا
 پر محدود ہے اور نقطہ کی جانب سے نکلتا ہے کہ وہاں سے اس جرم کا سامنے کا رخ ہو گا
 (صفحہ ۱۷۸)

لا = صا جم لہ
 ما = صا جب لہ جم سہ = ۱۹۵۳ صا بہ
 مے = صا جب لہ جم سہ + ۲۲۵ صا بہ
 جہاں سورج کا اوسط فاصلہ طول کی اکائی ہے اور عددی سر اعداد یہ کے
 ساتویں مقام کی اکائیوں میں ہیں۔

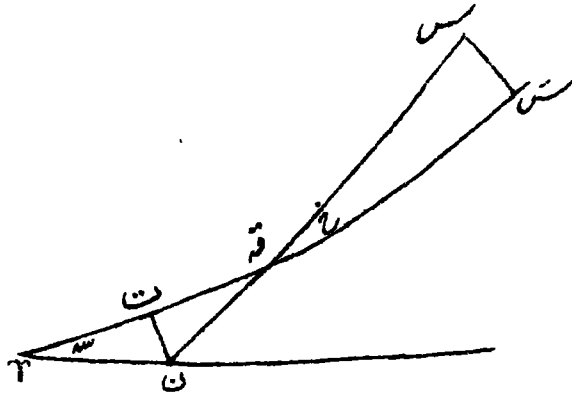
استحالہ کے عام ضابطوں کی رو سے
 جب ضہ = جب بہ جم سہ + جم بہ جب سہ جب لہ
 جم ضہ جم عہ = جم بہ جم لہ
 جم ضہ جب عہ = جب بہ جب سہ + جم سہ جم بہ جب لہ
 اس لیے لا = صا جم بہ جم لہ

ما = صا جب بہ جب سہ + صا جم بہ جم سہ جب لہ
 مے = صا جب بہ جم سہ + صا جم بہ جب سہ جب لہ
 سورج کی صورت میں بہ بہت چھوٹا ہوتا ہے اور جب بہ = بہ جب لہ
 جب سہ = ۳۹۸۰ اور جم سہ = ۹۱۷۴ رکھنے سے ہمیں مطلوبہ نتیجہ حاصل
 ہوتا ہے۔ سال بھر کے ہر دن کے لیے لا، ما، مے کی جدولیں ایلیمنٹس
 میں دی ہوئی ہوتی ہیں۔

مثال ۲۳۔ یہ مان کر کہ کہکشاں ستاروں کا ایک بڑا دائرہ
 ہے جو خط استوا کو صعود مستقیم ۱۸° س.م میں قطع کرتا ہے اور اس کے
 ساتھ زاویہ ۶۵° (شمالی جانب پیمائش کردہ) بناتا ہے، کہکشاں کے قطب کا
 صعود مستقیم اور میل معلوم کرو۔

مثال ۲۴۔ ایک سیارہ کا شمس مرکزی مدار طریقی الشمس سے
 چھوٹے زاویہ رخ پر مائل ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس کا میل اعظم ہو تو یا تو اس کی
 عرض بلد میں حرکت صفر ہوتی ہے یا اس کا طول بلد تقریباً ۹۰° + رخ جم سہ جب عہ
 ہے جہاں عہ، صعودی عقدہ کا طول بلد ہے۔
 چونکہ میل اعظم ہے اس لیے سیارہ س، خط استوا کے ساتھ اس کے

مدار کے نقطہ تقاطع ن سے ۹۰ پر ہونا چاہئے۔ طریق الشمس پر ن سس کا
ظل بھی تقریباً ۹۰ ہوگا۔ فرض کرو کہ ن سے طریق الشمس ۲ قہ پر عمود
ن ت ہے جہاں ۲ اعتدال سر ہے اور قہ صعودی عقدہ۔
چھوٹے مثلث ن ت ۲ میں سس ن ت = جب ۲ ت سس سے
اور مثلث ن ت قہ میں سس ن ت = جب (عہ - ۲ ت) سس خ
اس لیے جب ۲ ت = سس خ جب (عہ - ۲ ت) مم سے
اور اس لیے ۲ ت = خ مم سے جب عہ تقریباً
اس لیے سیارہ کا طول بلد بالعموم ۹۰ + خ مم سے جب عہ ہے۔



شکل (۳۷)

مثال ۲۵ - ثابت کرو کہ قطب اسد اور چاند کے درمیان اصلی فاصلہ بوقت
۴ بجے شام گریونچ اوسط وقت بتاریخ ۶ جنوری ۱۹۵۹ء ۴۱° ۵۹' ہے۔ یہ دیا گیا ہے کہ

میل		صعود مستقیم		چاند	
ش	۲۰	۱۵	۲۲	۵۶	۱۲
ش	۲۵	۲۲	۱۲	۳۱	۱۰

مثال ۲۶ - ثابت کرو کہ ایک ستارہ کے لیے جو مشرق کے شمال کی طرف طلوع ہوتا ہے جس شرح سے سمت بدلتا ہے وہ شرح وہی رہتی ہے جبکہ وہ طلوع ہوتا ہے اور جبکہ وہ مشرق میں ہوتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ شرح اقل ہوتی ہے جبکہ سمت مشرق کے شمال کی طرف

(۱۱۵)

جب 'ا' (مس لہ جب $\frac{عم}{۲}$)

ہو جہاں ستارہ کا عرض بلد لہ اور ارتفاع عم ہے جبکہ وہ مشرقی سمت میں ہوتا ہے۔
[Math. Trip. 190۷]

مثال ۲۷ - ثابت کرو کہ کسی معلومہ نیویج وقت پر دو معلومہ ستاروں کے ارتفاعوں کے مشاہدات مُشاہد کا طول بلد اور عرض بلد معلوم کرنے کے لیے کافی ہیں۔ بتاؤ کہ کس طرح ترسیمی طریقہ سے ان مشاہدات کی بنا پر مُشاہد کا محل کرۂ زمین پر معلوم کیا جاسکتا ہے۔

اگر مُشاہدے کے لیے منتخبہ ستارے نصف النہار کی مخالف سمتوں میں ہوں تو ثابت کرو کہ ہر ستارہ کے مشاہدہ کردہ ارتفاع میں چھوٹی خطا صہ کی وجہ سے عرض بلد اور طول بلد میں خطا میں ملتی ترتیب حسب ذیل ہوں گی:-

صہ قط (عم + عم) (عم - عم) اور صہ قط فہ قط (عم + عم) جب (عم - عم) (عم - عم) جہاں فہ، مسو بہ عرض بلد ہے اور ۲ عم ۲ عم ستاروں کے سمت ہیں۔



چھٹا باب

کرہ ہوائی کا انعطاف

(۱۱۶)

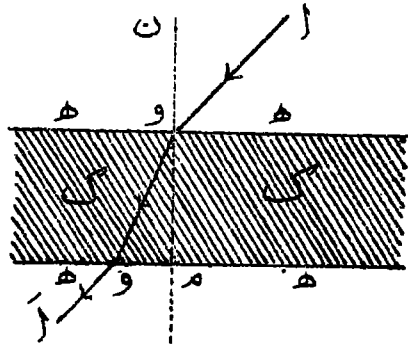
صفحہ	دفعہ
۱۷۷	۳۹ — مناظری انعطاف کے قوانین
۱۸۱	۴۰ — ایسیتی انعطاف
۱۸۳	۴۱ — ہوائی انعطاف کا عام نظریہ
۱۸۶	۴۲ — انعطاف کی محصلہ تقریبی مساوات کا تکمل
۱۹۰	۴۳ — کرہ ہوائی کے انعطاف کے لیے کیسینی کا ضابطہ
۱۹۴	۴۴ — کرہ ہوائی کے انعطاف کے لیے دیگر ضابطے
۱۹۸	۴۵ — کرہ ہوائی کے دباؤ اور تپش کا اثر انعطاف پر
۱۹۹	۴۶ — مشاہدہ سے کرہ ہوائی کے انعطاف کی تعیین
۲۰۳	۴۷ — انعطاف کا اثر ساعتی زاوے اور میل پر
	۴۸ — انعطاف کا اثر دو قریبی سماوی نقطوں کے درمیان ظاہری
۲۰۵	۴۹ — انعطاف کا اثر ایک دو ہرے تارے کے زاویہ محل کی پیمائش پر
۲۱۰	۳۹ — مناظری انعطاف کے قوانین
	اگر روشنی کی شعاع (۱) اور (شکل ۳۸) ایک شفاف متجانس واسطہ ۵ میں سے

حرکت کرتی ہوئی و پھر ایک دوسرے متجاس واسطہ گک میں داخل ہوتو اس شعاع کی سمت میں اپنا تک تبدیلی واقع ہوتی ہے اور شعاع اس نئے واسطہ کی سمت و و میں حرکت کرتی ہوئی عبور کرتی ہے۔ یہ تبدیلی انعطاف کے طور پر مشہور ہے۔ شعاع ۱ و کو موقوفہ شعاع اور شعاع و و کو منعطف شعاع کہتے ہیں۔ موقوفہ شعاع اور منعطف شعاع دونوں ایک ہی مستوی میں واقع ہوتی ہیں اور یہ مستوی واسطوں کی سطح فاصل کے نقطہ و پر کے عماد میں سے گذرتا ہے فرض کرو کہ ان دو واسطوں کی سطح فاصل کے نقطہ و پر عماد مرو ن ہے تو زاویہ ن و ۱ = سا کو وقوع کا زاویہ کہتے ہیں اور مرو و = نہ کو انعطاف کا زاویہ کہتے ہیں۔ انعطاف کا بنیادی کلیہ ضابطہ

جب سا = مہ جب نہ

سے بیان ہوتا ہے جہاں مہ ایک خاص مستقل ہے جو ان دو واسطوں کی نوعیت پر منحصر ہوتا ہے جن میں سے شعاع گذرتی ہے۔ اگر موقوفہ شعاع کی سمت میں کسی تبدیلی کے باعث زاویہ سایدل جائے تو اس کے ساتھ زاویہ نہ کو بھی اس طرح بدلنا چاہیے کہ ان دو زاویوں کی جیب کی نسبت وہی رہے۔ مہ کو پہلے واسطہ سے دوسرے واسطہ میں جانے کا انعطاف کہتے ہیں۔

(۱۱۷)

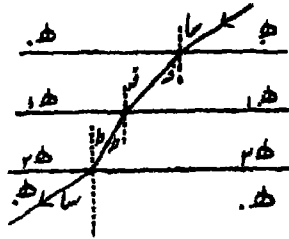


شکل (۳۸)

اس امر کو خوب ذہن نشین کر لینا چاہئے کہ مہ حسب صراحت بالا
ان دو واسطوں کی نوعیت پر منحصر ہوتا ہے جن میں سے شعاع گزرتی
ہے اور نیز نور کی نوعیت پر بھی منحصر ہوتا ہے۔ مثلاً نیلے رنگ کی
روشنی کی شعاع کے لیے مہ مختلف ہوگا اور سرخ رنگ کی روشنی کی شعاع
کے لیے مختلف اگرچہ واسطے دونوں صورتوں میں وہی ہوں۔ ہمیں صرف
کرہ ہوائی کے انعطاف پر غور کرنا ہے اور اس صورت میں انتشار (جیسا کہ
یہ ملاحظہ کیا جاتا ہے) استدر بڑا نہیں ہوتا کہ علمی علم ہیئت کے مقاصد کے لیے
اس پر توجہ کرنا ضروری ہو جائے۔ اس لیے ہم مہ کی ایک اوسط قیمت
لیتے ہیں جو کافی طور پر صحیح ہوگی اگرچہ نور کی وہ شعاعیں جن سے ہم واسطہ
رہے کا ترکیبی نوعیت کی ہوں۔ زمین کی سطح پر کرہ ہوائی کا انعطاف ظا
: می تپش اور ۷۰ مہرباؤ پر ۲۹۴۰۰۰۰۰۰ لیا جاتا ہے۔

اگر شعاع کی سمت الٹ دی جائے یعنی اگر شعاع و سے ابتدا کر کے
واسطہ گ کے میں سے ہوتی ہوئی و تک جائے اور وہاں سے واسطہ
ھ میں داخل ہو تو شعاع واسطہ ھ کو ٹھیک اسی راستہ و ا پر
سے گذرتی ہوئی عبور کرے گی۔ یہ اس عام خاصیت کی صرف ایک
خصوص صورت ہے کہ وہ منحنی یا شکستہ خط جس کو کوئی کرن مختلف واسطوں
میں سے انعطافوں کے ایک سلسلہ کے زیر اثر اور کسی وقوعوں پر
اختیار کرتی ہے اس وقت بھی اختیار کرے گی جبکہ نور کی اشاعت کی
سمت الٹ دی جائے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر گ کے کی پخلی سطح اوپر
کی سطح کے متوازی ہو تو شعاع واسطہ ھ ھ کی ایک دوسری تہ کے
اندرو پر داخل ہو کر سمت و ا اختیار کرے گی جو وقوع کی سمت ا و
کے متوازی ہوگی۔ پس ہمیں معلوم ہوا کہ نور کی شعاع جب متوازی رگوں
والی ایک متجاش تختی میں سے گذرتی ہے تو تختی سے باہر نکل کر پھر اپنی
سمت اختیار کر لیتی ہے اگرچہ وہ بلاشبہ ذرا بازو ہٹ جائے گی۔ ہمیں

چونکہ صرف شعاعوں کی سمتوں سے واسطہ ہے اس لیے اس کا بازو ہٹ جانا قابل توجہ نہیں ہے۔
فرض کرو کہ شعاع واسطہ $ھ$ سے $ھ$ میں جاتی ہے تو انعطاف $ن$ ا $م$ ہے شکل (۳۹) اور $ھ$ سے $ھ$ میں جاتی ہے تو انعطاف $ن$ ا $م$ ہے۔ یہ معلوم کرنا مقصود ہے کہ شعاع واسطہ $ھ$ سے $ھ$ میں جائے تو انعطاف $ن$ ا کیا ہوگا۔



شکل (۳۹)

شعاع $ھ$ سے $ھ$ اور $ھ$ کی متوازی تختیوں میں سے ہوتی ہوئی $ھ$ پر اپنی اصلی سمت کے متوازی سمت میں خارج ہوتی ہے، اور اگر وقوع کے متوازی زاوے سا، فہ، طہ ہوں تو پہلے وقوع اور آخری خروج سے حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں:-

$$\text{جب سا} = \text{مہ جب فہ اور جب سا} = \text{مہ جب طہ}$$

$$\text{اس لیے مہ جب فہ} = \text{مہ جب طہ}$$

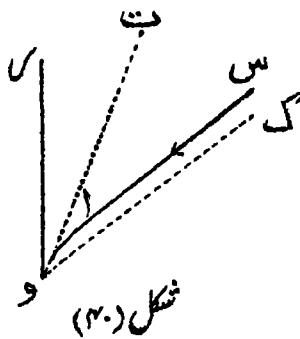
اس طرح حسب ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے:-

اگر ایک معیاری واسطہ سے دوسرے واسطہ میں جانے کا انعطاف $ن$ ا $م$ ہو اور معیاری واسطہ سے ایک اور واسطہ $ھ$ میں جانے کا انعطاف $ن$ ا $م$ ہو اور اگر $ھ$ سے $ھ$ میں راست گزرنے والی ایک شعاع کا وقوع کا

زاویہ فہ ہو اور زاویہ انعطاف طہ ہو تو مہ جب فہ = مہ جب طہ اور
 ھہ سے ھہ میں راست گذرنے والی ایک شعاع کے لیے انعطاف نما
 مہ مہ ہے۔

۴۰۔ ہیئت انعطاف۔

کسی جرم فلکی سے نور کی شعاعیں جب بیرونی فضاء سے ہوتی ہوئی زمین کے کرہ ہوائی
 میں سے گذرتی ہیں تو وہ ہیئت انعطاف (Astronomical refraction)
 سے متاثر ہوتی ہیں۔ کرہ ہوائی کے اوپر کے طبقات میں ہوا کی کثافت اس قدر کم ہوتی
 ہے کہ مجموعی انعطاف میں ان کی وجہ سے بہت کم اضافہ ہوتا ہے۔ وہ انعطاف
 جس سے ہیئت دال کو خاص طور پر واسطہ رہتا ہے زمین کی سطح کے اوپر صرف
 چند میل کے اندر وقوع پذیر ہوتا ہے۔ انعطاف کی باعث کسی ستارہ سے
 نکلی ہوئی نور کی شعاع کرہ ہوائی میں سے ایک خط مستقیم میں نہیں گذرتی۔
 یہ ایک منحنی پر چلتی ہے اور اس لیے جب اس کی شعاعیں اُمشاہد تک
 پہنچتی ہیں تو ستارہ اُسے ایسی سمت میں دکھائی دیتا ہے جو اُس کی اصلی
 سمت نہیں ہوتی۔



دور کے کسی ستارے سے ہماری جانب سمت س (شکل ۴۰)
 میں آنے والی نور کی شعاع سیدھی راہ پر چلتی ہے یہاں تک کہ وہ

۱۔ پر موثر کرکہ ہوائی میں داخل ہوا اور پھر یہاں سے اس کی راہ سیدھی نہیں رہتی۔ (۱) سے مشاہدہ کے مقام و تک یہ شعاع کرکہ ہوائی کی ایسی تہوں میں سے گذرتی ہے جن کی کثافت مسلسل بڑھتی ہے اور اس لیے شعاع مقام و تک پہنچنے میں زیادہ اور زیادہ ترخنی ہوتی جاتی ہے۔ مشاہدہ کو معلوم ہوتا ہے کہ شعاعیں ۲ سے آرہی ہیں جہاں وقت ۱ و پر خنی کا محاس ہے۔ اگر وقت ۱ خط و گ ۱ میں کے متوازی لکھینچا جائے تو اس خط سے وہ سمت معلوم ہوگی جس میں ستارہ نظر آتا اگر کوئی انعطافی خلل واقع نہ ہوتا۔ پس کسی جرم سماوی پر انعطاف کا اثر یہ ہوتا ہے کہ اس کا ظاہری مقام بقدر زاویہ ۲ و گ کے مشاہدہ کے راس سما کی جانب اوپر حرکت کرتا ہے۔ انعطاف بڑے سے بڑا فرق پر ہوتا ہے جہاں اس کی باعث اجرام فلکی تقریباً ۳۵ اوپر اٹھے ہوئے نظر آتے ہیں۔

پس کسی جرم فلکی کے مشاہدہ کردہ مجددوں میں بالعموم تصحیحات عمل میں لانی ہوں گی تاکہ ان تصحیحات کے بعد یہ معلوم ہو جائے کہ مجدد کیا ہیں جبکہ انعطاف نہ ہو۔ اس لیے انعطاف کے اثرات کی تحقیق عملی علم ہیئت کا ایک اہم جزو ہے۔

ایک تقریبی جدول یہاں دیجاتی ہے جس سے یہ معلوم ہوگا کہ انعطاف ستاروں کے راسی فاصلوں کو کتنا گھٹاتا ہے۔ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ بار پیار کا ارتفاع ۳۰ انچ ہے اور تپش ۵۰ فارن ہائٹ ہے۔ دیکھو نیو کومب کی اسفریکل اسٹرانومی صفحہ ۳۳۳۔

ظاہری راسی فاصلہ	انعطاف	ظاہری راسی فاصلہ	انعطاف	ظاہری راسی فاصلہ	انعطاف
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۵	۵	۵	۵	۵	۵
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
۲۵	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵
۳۰	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰

مثلاً ۵۰ کے راسی فاصلہ پر ہم دیکھتے ہیں کہ انعطاف ۱۰ ہے اور اسلئے صحیح راسی فاصلہ ۵۰ آ ۱۰ ہے۔ یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ کسی راسی فاصلہ کے لیے جو ۴۵ سے کم ہو انعطاف آ کے برابر بھی نہیں ہے اور ۲۰ تک کے راسی فاصلوں کے لیے انعطاف عملاً آنی درجہ ہے۔

۴۔ ہوائی انعطاف کا عام نظریہ۔

ہم فرض کریں گے کہ زمین کروی ہے اور کرہ ہوائی پتلی تہوں کے ایک سلسلہ سے ترکیب یافتہ ہے جو زمین کے ہم مرکز کرویوں سے محدود ہیں۔ ہوا کا انعطاف نما ہر تہہ کے پورے جثہ میں مستقل ہونا چاہئے لیکن ایک تہہ سے دوسری تہہ میں وہ متغیر ہو سکتا ہے۔

ایسی دو تہوں ۱ اور ۲ (شکل ۴) پر غور کرو۔ آزادانہ کے لحاظ سے بیرونی تہہ ۱ کا انعطاف نما ۱ اور تہہ ۲ کا انعطاف نما ۲ ہے۔ ایک شعاع جو ۱ میں سے سمت پ ق میں گذرتی ہوئی ۲ کے اندر داخل ہوتی ہے تو وہ سمت ق ر میں مڑ جاتی ہے فرض کرو کہ زمین کا مرکز ج ہے اور

منحنی کا ماس ستارے کی اصلی سمت پر منطبق ہونا چاہئے۔ برخلاف اس کے و پر اس منحنی کا ماس وہ سمت خواہر کرتا ہے جس میں شعاع مشاہد کی آنکھ میں داخل ہوتی ہے۔ ان دو ماسوں کا درمیانی زاویہ شعاع کی سمت میں مجموعی تبدیلی کا اظہار کرتا ہے۔ یہ وہ مقدار ہے جس کی تعیین ہم کرنا چاہتے ہیں کیونکہ اسی کو ہم باعموم انعطاف کہتے ہیں۔

اگر یہ انعطاف غہ ہو تو دو متصل ماسوں کا درمیانی زاویہ فرغہ ہے جو = فرطہ۔ فرغہ اگر غہ = > ج ت اور فہ = > ج ت پ۔ علم ہندسہ کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ فرطہ = مس فہ فرار، اس لیے فرغہ = مس فہ فرار۔ فرغہ

اب ہم اس مساوات کو مساوات (۱) کے ذریعہ متخیل کر سکتے ہیں۔ مساوات (۱) لکھی جاسکتی ہے
لوک ر + لوک مہ + لوک جب فہ = مستقل
اسے تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرار} + \text{فرمہ} - \text{مہ} + \text{مہ} - \text{فہ} = \text{فرغہ} \dots\dots\dots (۲)$$

اس لیے فرغہ = مس فہ فرمہ - مہ
(۱) کی مدد سے مس فہ کو ساقط کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرغہ} = \frac{1}{\text{مہ}} \times \text{مہ} (\text{فرمہ} - \text{مہ})$$

اس طرح ہمیں انعطاف کے لیے تفرقی مساوات مل جاتی ہے۔

۴۲۔ انعطاف کی محصلہ تفرقی مساوات کا تکمیل۔

انعطاف کو صحیح طور پر معلوم کرنے کے لیے اس مساوات کو محدود مہ = مہ اور مہ = ۱ کے درمیان تکمیل کرنا ہوگا جہاں مہ = ۱ وہ قیمت ہے جو

(۱۲۳) کرہ ہوائی کی اوپر کی تہ پر مہ کی ہے۔ اس منزل پر انعطاف کے نظریہ میں جو مشکل ہے وہ خود پیش پیش ہوتی ہے۔ وہ جملہ جیسے مکمل کرنا ہے دو متغیر اور مہ رکھتا ہے جن میں تعلق پیدا کرنا ضروری ہے۔ اگر اس تعلق کا قانون معلوم ہوتا تو ہم رکومہ کی قوم میں بیان کر سکتے اور اس طرح مسئلہ صرف یہ رہ جاتا کہ مہ کے کسی غامض تقاضا کا تکمل کیا جائے۔ لیکن ہمیں اس قانون کے متعلق ٹھیک معلومات حاصل نہیں ہیں جس کی بموجب انعطاف نما زمین کی سطح کے اوپر ارتفاع کے ساتھ متغیر ہوتا ہے۔ تاہم یہ معلوم کرنا دلچسپی سے خالی نہیں کہ اس مسئلہ کا ایک تقریبی حل حاصل کرنا ممکن ہے جو اکثر و بیشتر مقاصد کے لیے اس قانون کے علم کے بغیر بالکل کافی ہے جس کے بموجب کرہ ہوائی کی کثافت زمین کی سطح کے اوپر ارتفاع کے ساتھ بدلتی ہے۔

ہم مان لیتے ہیں کہ $h = a + s$ جہاں s ایک چھوٹی مقدار ہے کیونکہ کرہ ہوائی کے بلند ترین حصہ کا ارتفاع بھی بمقابلہ زمین کے نصف قطر کے چھوٹا ہے۔ ہم a کی بجائے اس کی یہ قیمت فرغہ کے جملہ میں درج کریں گے اور s کی ایک سے اعلیٰ ترقوتوں کو نظر انداز کریں گے۔ اس طرح

$$\begin{aligned} \text{مہ جب ی فرمہ} \\ \text{مہ (مہ۔ مہ جب ی) + ۲ (مہ۔ مہ)} \\ \text{مہ جب ی فرمہ} \\ \text{مہ (مہ۔ مہ جب ی) + ۲ (مہ۔ مہ)} \end{aligned}$$

لے اس مساوات کے تکمل کی عام بحث اس قدر دقیق ہے کہ اس کا اندراج یہاں نامناسب ہے۔ اس کا مطالعہ پروفیسر برنہو کو مپ کی (Comp. of sph. Astro.) اور پروفیسر سیمیل کی (Practical Astro.) میں کیا جاسکتا ہے۔ سیمیل کی دقیق اور جامع تحقیقات کا ذکر برنہو کی (Sph. Astro.) میں ملے گا۔ میں پروفیسر ای۔ ٹی۔ ویٹیکر کا یہ عنوان ہوں کہ انہوں نے اس نفیس تقریبی طریقہ کی طرف میری توجہ متعطف کی جو یہاں درج ہے۔

$$= \frac{\text{مب جب ی فرمہ}}{\text{مب جب ی فرمہ}} - \frac{\text{مب جب ی فرمہ}}{\text{مب جب ی فرمہ}}$$

پس انعطاف دو ٹکلوں سے بیان ہوتا ہے جن میں سے پہلا جو اہم ترین حصہ ہے یہ ظاہر کرتا ہے کہ انعطاف کیا ہوگا اگر س = ۰ یعنی اگر زمین کی سطح مستوی ہوتی۔ یہ ضرورتاً ایک مشہور ابتدائی تکملہ ہے اور اس کی قیمت ہے

جب (مب جب ی) - ی
اگر ہم چھوٹی مقدار (مب - ۱) کو لا سے تعبیر کریں تو یہ تکملہ لکھا جاسکتا ہے

جب { (۱ + لا) جب ی } - ی
اور اگر اسے میکلا رن کے مسئلہ سے لا کی قوتوں میں پھیلا یا جائے تو اس کو محسوب کرنے میں آسانی ہوگی اگر ہم لا کی دو سے اعلیٰ تر قوتوں کو نظر انداز کریں گے ہم دیکھتے ہیں کہ پہلے تکملہ کی تقریبی قیمت

(مب - ۱) س ی + ۱/۲ (مب - ۱) س^۲ ی ہے۔
دوسرے تکملہ کی قیمت معلوم کرنے میں ہم دیکھتے ہیں کہ س، مشکل

میں ایک جزو ضربی کے طور پر شریک ہوتا ہے اور اس لیے مب = مب = ۱ رکھنے سے کوئی قابل قدر خطا وقوع پذیر نہ ہوگی کیونکہ رتبہ س (مب - ۱) کی مقادیر اس قدر چھوٹی ہیں کہ نظر انداز ہو سکتی ہیں۔ پس دوسرے تکملہ ذیل کی سادہ شکل اختیار کرتا ہے

(۱۲۴)

$$- \frac{\text{جب ی}}{\text{مب ی}} \text{ س فرمہ}$$

فرض کرو کہ کرہ ہوائی کے اُس خول کی کثافت ث ہے جس کا انعطاف ثا مہ ہے۔ تب گلاڈسٹون اور ڈیل کے کلیہ کی رو سے مہ اور ث شکل

مہ - ۱ = م ث
کی ایک مساوات سے مربوط ہوں گے جہاں م ایک مستقل مقدار ہے۔ اس لیے
فرمہ = م x فرث

اگر زمین کی سطح پر ہوا کی کثافت θ ہو تو یہ تکملہ

$$-m \frac{جیب ی}{جم ی} \sin \theta \text{ فرٹ}$$

ہو جاتا ہے تکمیل بالحصص سے یہ تکملہ

$$-m \frac{جیب ی}{جم ی} \sin \theta \text{ فرٹ}$$

ہو جاتا ہے کیونکہ وہ قہیں جو تکملہ اسے مشت نہیں ہوتیں معدوم ہوتی ہیں۔ نیز ہم رکھتے ہیں $\sin = \sin$ جبکہ $\theta = 0$ اور $\sin = 0$ جبکہ $\theta = \theta$ ۔ اس جملہ کا تکملہ ایک قابل یادداشت اہمیت رکھتا ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ اس سے ہوا کی وہ کل کمیت تعبیر ہوتی ہے جو سطح زمین کے ایک اکائی رقبہ کے اوپر انتصا با واقع ہے اور اس لیے کرہ ہوائی کے دباؤ کے متناسب ہے یعنی بار پیمائے ارتفاع کے متناسب۔ اس لیے اس اصلی قانون کی جس کی بموجب کرہ ہوائی کی کثافت ارتفاع کے ساتھ متغیر ہوتی ہے اب اس سوال میں ضرورت نہیں رہتی۔

اس طرح انعطاف کے نظری جملہ نے ایک بہت ہی سادہ شکل اختیار کر لی۔ یہ دو تکملوں کے درمیان فرق ہے جن میں سے پہلا معلوم کیا جا چکا ہے اور دوسرا

$$m \sin \theta + m \sin \theta$$

کے متناسب ہونا چاہئے۔ اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ کل انعطاف شکل $m \sin \theta + m \sin \theta$ کا ہونا چاہئے جہاں θ ظاہری یا سی فاصلہ ہے اور θ ب مستقل مقدار میں ہیں۔ ان مستقلوں کی قیمتیں مشاہدے سے متعین کرنی ہوں گی جیسا کہ دفعہ ۴۶ میں ظاہر کیا جا چکا ہے۔

ر اور مہ کے درمیان تعلق کی نسبت ہم مختلف مفروضات بھی

مان سکتے ہیں اور ان کی بموجب محسوبہ نتیجوں کا مقابلہ ان نتیجوں کے ساتھ کر سکتے ہیں جو راست مشاہدے سے حاصل ہوئے ہوں۔ یہ امر قابل غور ہے کہ راور مہ کے درمیان متعدد مختلف رشتے ایسے ہیں کہ ہر ایک سے انعطاف کا ایک نظریہ ملتا ہے اور اس کی بموجب محسوبہ نتیجے مشاہدے سے حاصل کئے ہوئے نتیجوں کے ساتھ کافی طور پر مطابق ہوتے ہیں۔

(۱۲۵)

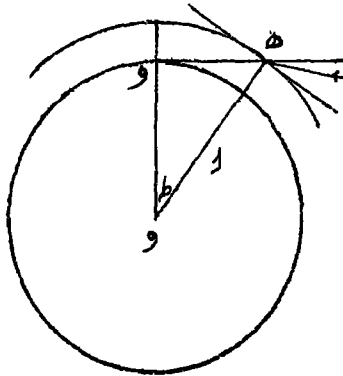
۴۴۔ کرہ ہوائی کے انعطاف کے لیے کیسینی کا ضابطہ

کیسینی کے مفروضہ سے جس میں کرہ ہوائی کو تجانس فرض کیا جاتا ہے انعطاف کے لیے ایک جملہ حاصل کیا جاسکتا ہے جو عملاً اس جملہ کے مماثل ہے جو ابھی ہم نے معلوم کیا ہے۔ بلاشبہ یہ مفروضہ غیر صحیح ہے لیکن یہ یاد رکھنا چاہیے کہ اگر زمین کی سطح منحنی ہونے کی بجائے مستوی ہوتی تو کرہ ہوائی کئی متواتر تہیں متوازی رُخ والی ہوتیں اور اس لیے سب سے پچلی تہ کے انعطاف نما۔ سے ہی کل انعطاف کی تخمین ہو جاتی (دفعہ ۳۹)۔ پس صرف زمین کا انحناء ہی ہے جو کیسینی کے نظریہ سے حاصل ہونے والے ضابطہ کو بالکل درست ہونے میں حارج ہے۔

یہ یاد کرنے کے عمدہ وجوہ موجود ہیں کہ بیس میل کے ارتفاع پر کرہ ہوائی کی کثافت، زمین کی سطح پر اس کی کثافت کے تیسویں حصہ سے بھی کم ہے۔ اس لیے ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ تقریباً سارا انعطاف زمین کی سطح کے اوپر بیس میل کے اندر پیدا ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مشاہدہ کا مقام و (شکل ۴۳) ہے اور وہ ایک شعاع ہے جو و پرافقی سمت میں پہنچتی ہے، ایسی کسی شعاع پر بلاشبہ کسی دوسری شعاع کی بہ نسبت انعطاف کا زیادہ اثر ہوگا۔

فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر R ہے اور کرہ ہوائی کے اس خول کا نصف قطر r ہے جس پر شعاع نقطہ h پر آکر پڑتی ہے۔



شکل (۴۳)

اگر وہ اور ہر پر خولوں کے
ماسوں کا درمیانی زاویہ
ہو اور اگر وہ کو ایک
خط مستقیم تسلیم کیا جائے تو

$$\text{جب } \frac{1}{u} = \frac{1}{v} - \frac{1}{f} \quad \text{جب } \frac{1}{u} = \frac{1}{v} - \frac{1}{f}$$

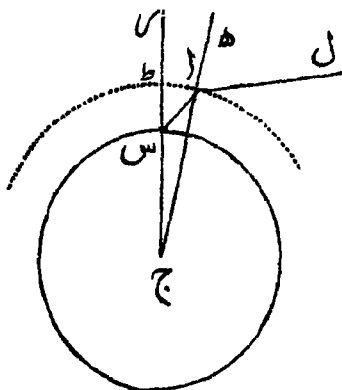
$$r_{\infty}/r_0 = 1/\sqrt{r} =$$

10/11

اس لیے طہ تقریباً ۶ ہے۔

اس طرح مختلف کتا فتوں

کی ہوا کی موثر تہیں جن میں سے شعاعوں کو گذرنا ہوگا اس قدر تقریباً متوازی ہیں کہ ان میں سے کسی کو بھی ٹھیک طور پر متوازی بنانے کے لیے ۹۰ سے بڑے زاویہ میں سے گھمانا نہ پڑے گا۔ اس لیے ہم حقیقت سے زیادہ دور نہ ہوں گے اگر یہ مان لیں کہ کرہ ہوائی انفی تہوں پر مشتمل ہے۔ ایسی صورت میں کرہ ہوائی کے غیر متجانس ہونے سے کل انعطاف پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔



شکل (۲۲)

ہیں پر ما۔
 یہ اسی فاصلہ کو انعطاف کے

ساتھ مربوط کرنے والا ضابطہ مفروضہ

متجاسس کمرہ ہوائی کی صورت میں

کیسینی نے حاصل کیا ہے جو حسب

ذیل ہے۔

ہم مان لینگے کہ کرہ ہوائی کو

اس فضا میں مکشف کر دیا گیا ہے

جو نصف قطر ج میں اور ج ط

کے دو کروی خولوں کے درمیان ہے۔

کرہ ہوائی کی کثافت کو یکساں اور اس کے انعطاف نما کو مہ فرض کیا جاتا ہے۔

شعاع ل ا کرہ ہوائی کی سطح کے نقطہ ا پر پڑتی ہے جس پر اس سطح کا عمود ج ا ہ ہے اور یہ شعاع زمین کی سطح کے نقطہ س پر مشاہد تک پہنچتی ہے، پس زاویہ ل ا ہ = سا وقوع کا زاویہ ہے اور زاویہ س ا ج = فہ انعطاف کا زاویہ ہے۔

شعاع سمت ا س میں مشاہد تک پہنچتی ہے اور اس لیے زاویہ ا س ط = ی جرم کا ظاہری راہی فاصلہ ہے۔ اگر حسب سابق اس سے زمین کا نصف قطر تقصیر ہو اور کرہ ہوائی س ط کی موٹائی ا سے ظاہر کی جائے تو مثلث س ج ا سے

$$(ا + ل \setminus ا) \text{ جب فہ = جب ی}$$

اور نیز جب سا = مہ جب فہ

اس لیے جب سا = مہ (ا - ل \setminus ا) جب ی، بڑی حد تک

کیونکہ ل ایک چھوٹی مقدار ہے جو $\frac{1}{10}$ سے کم محسوب ہوئی ہے۔

اگر کل انعطاف غہ ہو یعنی موقوفہ شعاع اپنی اصلی سمت سے بقدر زاویہ غہ کے مڑ چکی ہو تو سا = فہ + غہ اور یہ فرض کر کے کہ غہ کو قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{غہ جب ا} = (\text{جب سا} - \text{جب فہ}) \text{ قہ فہ}$$

اب جب سا، جب فہ، جم فہ کی بجائے علی الترتیب جملے

$$\text{مہ (ا - ل \setminus ا) جب ی، (ا - ل \setminus ا) جب ی، (ا - ل \setminus ا) جب ی}$$

درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{غہ} = (\text{مہ} - \text{ا}) \text{ قہ ا}}{\text{مہ (ا - ل \setminus ا) جب ی، (ا - ل \setminus ا) جب ی، (ا - ل \setminus ا) جب ی}}$$

$$\begin{aligned} &= (م - ۱) ق م آ (مس ی - (مس ی + مس ی) ل ل ل ل) \\ &= (مس ی + دب مس ی) (۱) \\ &جہاں \quad (م - ۱) (۱ - ل ل ل ل) ق م آ \\ &ب = (م - ۱) ل ل ل ل ق م آ \end{aligned}$$

یہ ضابطہ جو اس دفعہ اور پچھلے دفعہ کے مختلف اعمال سے حاصل کیا گیا ہے علی طور پر قابل استعمال ہو گا اگر ہم ۱ اور دب کی عددی قیمتیں حاصل کر لیں۔ یہ عددی قیمتیں کم از کم دو مخصوص صورتوں میں (دیکھو دفعہ ۴۶) انعطاف کا راست مشاہدہ کر کے حاصل کی جاتی ہیں چنانچہ ہم یہ مان لیں گے کہ اس طرح ہمیں یہ معلوم ہوا ہے کہ تپش ۵۰ فارن ہائیٹ اور دباؤ ۳۰ انچ پر انعطاف، ظاہری راسی فاصلوں ۵۴ اور ۴۷ پر علی الترتیب ۸۰.۶۰۶ اور ۲۰۰.۴۶ ہیں۔

اس طرح ضابطہ (۱) سے ۱ اور دب معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل دو مساواتیں ملیں گی

$$۸۰.۶۰۶ = (مس ۵۴) + دب (مس ۵۴)$$

$$۲۰۰.۴۶ = (مس ۴۷) + دب (مس ۴۷)$$

ان مساواتوں کو حل کرنے سے اوسط دباؤ ۳۰ انچ اور تپش ۵۰ ف پر انعطاف کے لیے حسب ذیل عام جملہ حاصل ہوتا ہے

$$غہ = ۵۸۶۲۹۴ مس ی - ۶۰۶۶۸۲ مس ی (۲)$$

اس طرح ب ۱ صرف ۸۴۳۱ ہے اور اس لیے ہم دوسری رقم کو نظر انداز کر سکتے ہیں سوائے اس صورت کے جبکہ مس ی بہت بڑا ہو یعنی جبکہ جرم افق کے قریب ہو۔

اگر راسی فاصلہ ۵۰ سے متجاوز نہ ہو تو اکثر مقاصد کے لیے جبکہ انتہائی تپشیں شامل نہ ہوں انعطاف کو کافی صحت کے ساتھ اس سادہ جملہ

ک مس ی

سے محسوس کیا جاسکتا ہے۔ یہاں صرف پہلی رقم استعمال کی گئی ہے اور دوسری رقم جس میں مس ی شامل ہے نظر انداز کردی گئی ہے اس لیے گ کو ۵۸۶۲۹۴۴ لینے کی بجائے ۵۸۶۲ لینا قدر زیادہ صحیح ہے۔ اس مقدار ک کہ انعطاف کا سرکہتے ہیں۔

مثال ۱۔ تجانس کرہ ہوائی کی موٹائی کیا ہونی چاہئے کہ جس سے انعطاف کے لیے ایسا جلائے ہو مشاہدے کے مطابق ہو۔

$$- \text{ب} \backslash \text{ل} = \text{ل} \backslash \text{ل}$$

اس لیے $\text{ل} \backslash \text{ل} = ۵۸۶۳۱ - ۵۸۶۳۱ = ۰$ اس لیے $۳۹۵۴ = \text{ل} \backslash \text{ل} = ۵۸۶۳۱ - ۵۸۶۳۱ = ۰$ میل لینے سے $\text{ل} = ۴۵$ میل۔

مثال ۲۔ بتاؤ کہ دباؤ ۳۰ اینچ اور تپش ۵۰ فارن ہائٹ پر کرہ ہوائی کا انعطاف تراکمینی کے نظریہ کی بموجب ۱۲۰۰۰۰۰۶۸۳ ہوگا۔

مثال ۳۔ ضابطہ (۱) سے بتاؤ کہ راسی فاصلہ ۴۸۰۹۱ پر انعطاف ۸۶۳۴۴ ہے (دباؤ ۳۰ اور تپش ۵۰ فارن ہائٹ)۔

مثال ۴۔ بتاؤ کہ اگر وہ مقداریں جو ثانیہ کے پانچویں حصہ سے کم ہوں نظر انداز کردی جائیں تو انعطاف کے جملہ کی دوسری رقم ترک کیجا سکتی ہے جب کبھی راسی فاصلہ ۵۵ سے تجاوز نہ ہو۔

مثال ۵۔ اگر ہم انعطاف کو معمولی شکل ک مس ی میں جہاں ی ظاہری راسی فاصلہ ہے بیان کرنے کی بجائے شکل ک مس ی میں بیان کریں جہاں ی حقیقی راسی فاصلہ ہے تو ثابت کرو کہ اگر ک اور ک دونوں تویں کے ثانیوں میں بیان کئے گئے ہوں تو

$$\text{ک} = \text{ک} (۱ - \text{ک} \text{ قطا ی جب آ})$$

۴۴۔ کرہ ہوائی کے انعطاف کے لیے دیگر ضابطے۔

یہ ظاہر ہے کہ ہوا کی کثافت گھٹتی جاتی ہے جیسے زمین سے اُس کا فاصلہ بڑھتا ہے۔ پس کرہ ہوائی کا انعطاف نما ۱۲۰۰۰۰۰۶۸۳ سے

جو زمین کی سطح پر اس کی قیمت ہے قیمت اتک گھٹے گا جو انعطافی کرہ ہوائی کے اوپر کے حدود پر اس کی قیمت ہے۔

دفعہ ۲۱ کے مطابق فرض کرو کہ سب سے نجلی کرہ ہوائی کی تہ کا نصف قطر ہے جبکہ مہ گھٹا کر ایک ہو گیا ہے۔ سمپسن (Simpson) نے یہ مان

لیا کہ $r = r^0 + 1$ جہاں n ایک مقدار ہے جو فی الحال غیر معلوم ہے۔

مفروضہ مساوات سے $r = r$ حاصل ہوتا ہے جبکہ $r = a$ اس کا مساوات کی ترکیب میں اولاً خیال رکھا گیا تھا۔ جیسے r بڑھتا ہے مہ گھٹنا چاہئے اور یہ اس صورت میں ہو گا جبکہ $(n + 1)$ مثبت ہو۔

ہم دفعہ ۲۱ میں دیکھ چکے ہیں کہ مہ جب $r = 0$ مستقل کرہ ہوائی کے اوپر کے اور نیچے کے حدود کے لیے اس حاصل ضرب کی جو قیمتیں ملتی ہیں ان کو مساوی رکھنے سے

$$m \cdot a \cdot \sin y = r \cdot \sin y$$

جہاں y بالآخرین تہہ پر وقوع کا زاویہ ہے اور y زیر ترین تہہ پر وقوع کا

زاویہ۔ r کی بجائے مساوات $r = r^0 + 1$ سے حاصل شدہ قیمت

رکھی جائے تو

$$m \cdot a \cdot \sin y = r^0 + 1 \cdot \sin y$$

$$\sin y = \sin y$$

$$y = y$$

(۱۲۹)

اب $r = r^0 + 1$ کا لوکار تہی تفرقی لینے سے

$$(n + 1) \frac{1}{r} + \frac{1}{r^0} = 0$$

اس لیے دفعہ ۴۱ کی مساوات (۲) سے

$$\frac{ن}{م} = \frac{م}{ن} \frac{فرقہ}{فرقہ}$$

اور دفعہ ۴۱ کی مساوات (۳) سے

$$\frac{فرقہ}{ن} = \frac{۱}{ن}$$

انعطاف معلوم کرنے کے لیے ہمیں اس جملہ کو فیہ کی ان قیمتوں کے درمیان تکمیل کرنا ہوگا جو کرہ ہوائی کے حدود پر لی گئی ہوں۔ زمین کی سطح پر انعطاف کا زاویہ ی ہے اور کرہ ہوائی کی اوپر کی حد پر انعطاف کا زاویہ

جب ۱ جب ی

ہے۔ اس لیے انعطاف کے لیے سمپسن کا حسب ذیل ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$غہ = \frac{۱}{ن} \{ ی - جب ۱ \} \left(\frac{جب ی}{م} \right)$$

مثال ۱۔ اگر $م = ۱۰$ جہاں سے ایک چھوٹی مقدار ہو جس کی دو سے اعلیٰ ترقوتیں نظر انداز کی جاسکتی ہیں تو ثابت کرو کہ سمپسن کے ضابطہ سے انعطاف کے لیے حسب ذیل تقریبی جملہ حاصل ہوتا ہے

$$غہ = \left(\frac{۱}{ن} - \frac{۱}{ن} \right) مس ی - \frac{۱}{ن} مس ۱$$

مثال ۲۔ مان کر کہ مشاہدہ سے انعطاف کا کلیہ (دفعہ ۴۲)

$$غہ = ۵۸۶۲۹۴ مس ی - ۱۰۶۶۸۲ مس ۱$$

حاصل ہوتا ہے ثابت کرو کہ سمپسن کے ضابطہ سے زمین کی سطح پر ہوا کے انعطاف نما مہ کی قیمت ۲۸ ... ۱۱ حاصل ہوتی ہے اور نیزہ کہ $۸ = ۸$ اور

$$\frac{۱}{ن} = \frac{۱}{۱}$$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ اگر سمپسن کا ضابطہ صحیح ہوتا تو کرہ ہوائی کی

بلندی جہاں تک کہ وہ انعطاف کے لیے موثر ہے تقریباً دس میل ہوتی۔
براڈلے (Bradley) نے ایک آسان ضابطہ ہمپسن کے محصلہ بالا
ضابطے سے اخذ کیا ہے جو حسب ذیل ہے:۔ ہمپسن کا ضابطہ ہے

$$\text{غہ} = \frac{1}{n} (y - \text{جب } \frac{1}{m} \text{ جب } y)$$

اسے لکھا جاسکتا ہے جب (y - n غہ) = جب y | مہ

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{جب } y - \text{جب } (y - n \text{ غہ})}{\text{جب } y + \text{جب } (y - n \text{ غہ})} = \frac{\text{مہ} - 1}{\text{مہ} + 1}$$

یا چونکہ انعطاف ایک چھوٹی مقدار ہے اس لیے

$$\text{غہ} = \frac{2}{n} \frac{\text{مہ} - 1}{\text{مہ} + 1} \text{مس } (y - \frac{1}{n} n \text{ غہ})$$

اگر ہم مثال ۲ صفحہ ۱۹۶ سے مہ اور n کی دی ہوئی قیمتیں لیکر ہمیں
درج کریں تو تقریبی ضابطہ

$$\text{غہ} = 59'' \text{مس } (y - ۴ \text{ غہ})$$

ماصل ہوتا ہے۔

ہم اس ضابطہ کی تصحیح اس طرح کر سکتے ہیں کہ وہ سیاری پیش اور
دباؤ پر دو معلومہ انعطافوں کے لیے ٹھیک ہو جائے، مثلاً اگر ہم لیں

$$y = 50'' \text{ غہ} = 69136$$

$$y = 25'' \text{ غہ} = 61410$$

(دیکھو گرنوچ کی جدولیں) تو براڈلے کا ضابطہ شکل

$$\text{غہ} = 581361'' \text{مس } (y - ۹ - ۴۴ \text{ غہ})$$

میں ماصل ہوتا ہے۔ اس ضابطہ سے ۸۰ کے ماسی فاصلہ تک سب انعطاف
تقریبی طور پر معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

براڈلے کا ضابطہ افق کے قریب مشاہدات کے لیے موزوں
ہے کیونکہ جس وقت y کی قیمت ۹۰ کے قریب آتی ہے تو مس (y - ۹ - ۴۴ غہ)

لا انتہا بڑا نہیں ہو جاتا۔ مثال ۱۔ بتاؤ کہ انعطاف کے لیے براڈلے اور کیسینی کے ضابطے

$$\text{غہ} = 581361 \text{ مس (ی) - } 310.9 \text{ (غہ)}$$

$$\text{اور غہ} = 581294 \text{ مس ی - } 310.9682 \text{ مس ی}$$

علاؤ مثال میں بشرطیکہ راسی فاصلہ بہت بڑا نہ ہو۔

مثال ۲۔ اس مفروض کی بناء پر کہ گرہ ہوائی کے انعطاف نما کی (ن + ۱) ویں قوت زمین کے مرکز سے فاصلہ کے بالعکس بدلتی ہے ایسی انعطاف کے لیے براڈلے کا تقریبی ضابطہ

$$\text{غہ} = \text{راس (ی) - } \frac{1}{4} \text{ (ن غہ)}$$

ثابت کرو۔

مثال ۳۔ اگر گرہ ہوائی میں کسی نقطہ پر انعطاف نما زمین کے مرکز سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلے اور زمین کی سطح پر سب ہو اور گرہ ہوائی کی حد پر اکائی ہو تو ثابت کرو کہ انعطاف کے لیے متناظر تصحیح

$$\text{جب (ی) + } \frac{1}{4} \text{ (غہ) = مابہ جب ی}$$

(Math. Trip. 1906)

سے حاصل ہوتی ہے۔

۴۵۔ گرہ ہوائی کے دباؤ اور اسکی تیش کا اثر انعطاف پر۔

انعطاف کے ضابطہ (۲) میں جو دفعہ ۴۳ میں حاصل کیا جا چکا، ہم نے مان لیا تھا کہ باریسما کا ارتفاع ۳۰ انچ اور بیرونی ہوا کی تیش ۵۰ فارن ہائٹ ہے۔ اب ہمیں وہ ضابطہ معلوم کرنا ہے جو دباؤ اور تیش کی دیگر دی ہوئی قیمتوں پر استعمال کرنا ہوگا۔

ہم تسلیم کر لیتے ہیں کہ زمین کی سطح پر انعطاف ہوا کی کثافت کے متناسب ہے، اس لیے اگر دباؤ د اور تیش ت پر انعطاف غہ ہو اور معیاری دباؤ ۳۰ انچ اور تیش ۵۰ پر انعطاف غہ ہو تو کیسوں کے

(۱۳۱)

خواص سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{غہ}}{\text{غہ}} = \frac{د}{۳۰} = \frac{۵۰ + ۲۶۰}{۳۰} = \frac{۲۱۰}{۳۰}$$

غہ کی وہ قیمت درج کرنے سے جو دفعہ ۲۲ میں معلوم ہو چکی ہے دباؤ د اور تیش ت پر ظاہری راسی فاصلہ ی کے لیے کرہ ہوائی کے انعطاف کا تقریبی ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{غہ} = \frac{۲۱۰}{۳۰} (۲۹۴ - ۵۸۱ \text{ مس ی} - ۶۰۶۸۲ \text{ مس ی})$$

گرنیج آبروئش (Gre. Observations) بابت ۱۸۹۰ء کے ضمیمہ میں مسٹر پی۔ ایچ کاویل (Cowell) نے انعطاف کی ان جدولوں کو مرتب کیا ہے جو گرنیج ٹی رصد گاہ میں استعمال کی جاتی ہیں۔ ان جدولوں میں صفر درجہ سے ۲۰.۸۸ تک راسی فاصلہ کے ہر منٹ کے لیے اوسط انعطافات ۲۰ اینچ دباؤ اور ۵۰ فارن ہائٹ تیش کیلئے درج ہیں۔ وہ تصحیحات جو تیش اور دباؤ میں تغیرات واقع ہونے کی وجہ سے عمل میں لانی ہوں گی دوسری جدولوں میں دی جاتی ہیں۔

۴۶۔ مشاہدہ سے کرہ ہوائی کے انعطاف کی تعیین۔

انعطاف کے جملہ ا س ی + ب س ی کے سروں ۱ اور ب کو نصف النہاری راسی فاصلوں کا مشاہدہ کر کے مختلف طریقوں پر متعین کیا جاسکتا ہے ان میں سے تین طریقے ہم یہاں بیان کریں گے۔

پہلا اور دوسرا طریقہ ایک ہی رصد گاہ میں استعمال کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ رصد گاہ کا عرض بلد نہ تو بہت بڑا ہو نہ بہت چھوٹا۔ تیسرے طریقہ میں دو رصد گاہوں کی شرکت عمل ضروری ہے جن میں سے ایک شمالی نصف کرہ زمین میں اور دوسری جنوبی نصف کرہ زمین میں واقع ہو۔

پہلا طریقہ۔ ایک ایسے ستارہ کا انتخاب کیا جاتا ہے جو

بالائی اور زیرین دونوں شگندوں کے وقت تیب افق کے اوپر ہو۔ اگر بالائی اور زیرین شگندوں پر ظاہری راسی فاصلے ملے، ملے ترتیب ی' ی' ہوں اور یہ فاصلے راس کے شمال کی جانب مثبت ہوں تو اصلی راسی فاصلے

ی + (مس ی + دب مس ی

ی + (مس ی + دب مس ی

ہوں گے۔ ان دو راسی فاصلوں کا اوسط وہی ہے جو راس سے شمالی قطب کا (۱۳۲) فاصلہ ہے یعنی عرض القام۔ پس ہمیں مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\frac{1}{2} (y + y') + (ms y + ms y') + db = 90 - \phi$$

ی اور ی' کی مشاہدہ کردہ قیمتیں درج کرنے سے تین مقداروں (دب اور فہ میں ایک خطی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

دوسرے ستاروں کا اسی طرح مشاہدہ کیا جاتا ہے اور ہر ستارے سے انہی تین مہجول مقداروں (دب اور فہ میں ایک خطی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ ایسی تین مساواتیں (دب اور فہ کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں۔ برہم نتیجہ زیادہ تر صحیح ہو گا اگر ہم بہت سے ستاروں کا مشاہدہ کریں اور پھر محصلہ مساواتوں پر اقل ترین مربعوں کا طریقہ استعمال کریں جو بعد میں بیان کیا جائے گا۔

ایک سادہ مثال کے طور پر ہم ایک ایسی صورت لیں گے جس میں عرض بلد معلوم ہو اور جس میں چونکہ کوئی راسی فاصلہ بہت بڑا نہیں ہے اس لیے ہم یہ مان سکیں گے کہ انعطاف ایک ہی رقم ک مس ی سے بیان ہوتا ہے۔

ڈنسنک (Dunsink) میں جو شمالی عرض بلد ۵۳° ۲۳' ۳۰" واقع ہے ستارہ عقیقاؤس (a Cephei) کا مشاہدہ کیا گیا تو معلوم ہوا کہ

بالائی تکبیر پر ظاہری راسی فاصلہ ۸ ۴۸ ۳۷ ہے اور ۱۲ گھنٹوں کے بعد زیرین تکبیر پر اس کا ظاہری راسی فاصلہ ۶۴ ۲۲ ۴۷ ہے۔

اس لیے اصلی راسی فاصلے

$$۸ ۴۸ ۳۷ + ک مس (۸ ۴۸ ۳۷)$$

ہوں گے ان کا مجموعہ عرض التمام (۶۴ ۲۲ ۴۷) کا دو گنا ہونا چاہیے اس لیے

$$۲۳ ۱۱ ۲۷ + ک = (۲۱۰۸۵ + ۰۱۱۵۵) = ۲۲۰۰۰ = ک$$

وہ سر ا طریقہ۔ انقلابوں پر سورج کے راسی فاصلوں کا

مشاہدہ کرنے سے بھی انعطاف کے مستقل معلوم کئے جاسکتے ہیں۔ فرض کرو کہ انقلابوں پر سورج کے ظاہری نصف النہاری راسی فاصلے ی، ی، ی ہیں۔ فرض کرو کہ ان کے جواب میں انعطاف غم، اور غم ہیں۔ اس لیے اصلی راسی فاصلے ی، ی، اور ی، ی، غم ہیں۔ یہ مان لیا کہ سورج کے عرض بلد کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے یا دوسرے الفاظ میں سورج کا مرکز فی الواقع طریق الشمس میں ہے جو ہمیشہ بڑی حد تک درست ہے تو ان راسی فاصلوں کا اوسط وہ قوس ہے جو اس سے خط استوا تک کھینچی گئی ہے یعنی عرض بلد۔ اس لیے

$$۲ فہ = ی + ی + غم + غم$$

اگر عرض بلد معلوم ہو اور اگر ہم یہ مان لیں کہ

$$غم = ک مس ی، اور غم = ک مس ی$$

تو ک کے لیے ایک مساوات حاصل ہوتی ہے۔

تیسرا طریقہ۔ اس میں ایک ہی ستارہ میں کے راسی

فاصلے میں کر اور میں کر دو مختلف رصد گاہوں سے مشاہدہ کئے جاتے ہیں، فرض کرو کہ ان میں سے ایک رصد گاہ شمالی عرض بلد فہ پر واقع ہے اور دوسری جنوبی عرض بلد فہ پر (دیکھو شکل ۴۵)۔ اگر شمالی اور جنوبی قطب مساوی قی اور قی ہوں تو

$$\text{میں کر} = \text{میں قی} - \text{کر قی} = \text{فہ} - \text{فہ}$$

$$\text{میں کر} = \text{میں قی} - \text{کر قی} = \text{فہ} + \text{فہ}$$

اگر مشاہدہ کردہ

راسی فاصلے ی اور ی ہوں اور اگر ہم انعطافوں کو یک میں ی اور یک میں ی مان لیں تو

$$\text{میں کر} = \text{ی} + \text{یک میں ی}$$

$$\text{میں کر} = \text{ی} + \text{یک میں ی}$$

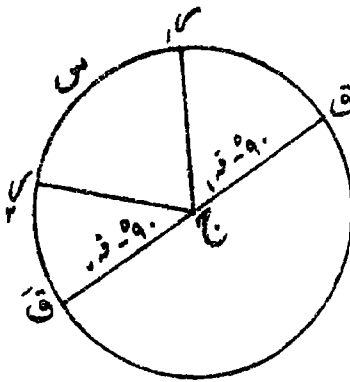
پس

$$\text{ی} + \text{یک میں ی} = \text{ی} + \text{یک میں ی}$$

$$= \text{فہ} + \text{فہ}$$

اس مساوات سے کہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

ہم مثال کے طور پر ستارہ *مرآۃ المسلسلہ* (۴ Andromedae) لیں گے۔ اس ستارہ کو گزرتیج جس کا عرض بلد ۵۱° ۲۸' ۳۸" مش ہے بوقت تکبیر مشاہدہ کیا گیا تو معلوم ہوا کہ اس کا جنوبی ظاہری راسی فاصلہ ۱۶ ۲۰ ۳ تھا۔ اس ستارہ کو اس امید کی رصد گاہ پر بھی جس کا عرض بلد



شکل (۴۵)

۳۳ ۵۶ ۴ ج ہے بوقت تکبیر مشاہدہ کیا گیا تو معلوم ہوا کہ اس کا شمالی
ظاہری راسی فاصلہ ۶۹ ۵۰ تھا۔ اس لیے ہمیں حسب ذیل مساوات
حاصل ہوتی ہے

$$۲۰۹۶ + ک مس (۲۰۹۶) + ۵۰۱۶۹ + ک مس (۲۰۹۶)$$

$$۲۲۸۵ = ۲۲۸۵$$

$$ک = ۸۶۳$$

مس سے

۴۷۔ انعطاف کا اثر ساعتی زاوے اور میل پر۔

کسی ستارے کے ساعتی زاوے اور میل پر انعطاف کا اثر معلوم کرنے کے
لیے دفعہ ۳۵ کے تفرقی ضابطے استعمال کیے جاسکتے ہیں۔ انعطاف کا اثر
یہ ہوتا ہے کہ ستارہ اپنی اصلی مقام سے راس کی طرف ذرا اوپر اٹھا ہوا
دکھائی دیتا ہے۔ اگر مشاہدہ کردہ راسی فاصلہ ی ہو تو اصلی راسی فاصلہ
ی + مف ی ہوگا جہاں مف ی = ک مس ی۔ ہم مان لیتے ہیں
کہ عرض بلد معلوم ہے، اس لیے مف فہ = ۰ اور چونکہ سمت انعطاف
سے نہیں بدلتا اس لیے مف ل = ۰۔

اب ستارہ کے میل پر انعطاف کا اثر معلوم کرنے کے لیے ہم
وہ ضابطہ لکھ لیتے ہیں جو مف ل، مف فہ، مف ی، مف فہ کے
درمیان ہے (دیکھو دفعہ ۳۵ (۱) یعنی

مف فہ + جم عا مف ی - جم س مف فہ - جب س جم فہ مف ل = ۰۔
اس مساوات میں رکھو مف ل = ۰، مف فہ = ۰، مف ی = ک مس ی تو

$$مف فہ = - ک مس ی جم عا$$

یعنی اگر فہ مشاہدہ کردہ میل ہو تو فہ = ک مس ی جم عا اصل میل ہے۔
ساعتی زاوہ یہ پر انعطاف کا اثر معلوم کرنے کے لیے دفعہ ۳۵ کا

ضابطہ (۲)

$$مف ی + جم ل مف فہ + جم عا مف فہ + جم فہ جب ل مف س = ۰۔$$

تاکہ اصلی میل حاصل ہو اور مف ضہ حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے (۱۳۵)
مف ضہ = ک مس ی جم عا

نیز
مف س = پ ش ق = ک مس ی جب عا ق م پ ش
= ک مس ی جب عا ق ط ضہ

نیز چونکہ مف عا مف ضہ انعطاف سے نہیں بدلتا اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہئے

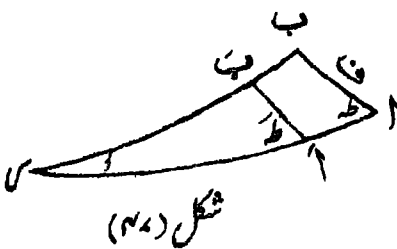
جم عا جم ضہ مف عا = جب عا جب ضہ مف ضہ
اس میں مف ضہ کی بجائے اس کی قیمت درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے
مف عا = ک جب عا مس ضہ مس ی

۴۸۔ انعطاف کا اثر دو قریبی سماوی نقطوں کے درمیان
ظاہری فاصلہ پر۔

ہم اول یہ بتائیں گے کہ اگر انعطاف کو ک مس ی لیا جائے تو دو
قریبی ستاروں کے درمیان ظاہری فاصلہ ف میں جسے قوس کے ثانیوں
میں لیا گیا ہو حسب ذیل تصحیح جمع کرنی ہوگی جو قوس کے ثانیوں میں ہے:
ک ف (۱ + جم ط مس ی) جب ا

جہاں صدر تارے کا راسی فاصلہ ی ہے اور ط وہ زاویہ ہے جو ان
دو ستاروں کو ملانے والی قوس اور اس قوس کے درمیان ہے جو صدر تارے
سے اس تک کھینچی گئی ہو۔

فرض کرو کہ راس ہے
ا = لا، راس ب = ما،
ا ب = ف، زاویہ
ا راس ب = ا اور زاویہ
راس ا ب = ط۔ انعطاف کا



اثر یہ ہوگا کہ قوس Δ ب راس کی طرف اوپر کو Δ ب تک ہٹی ہوئی ہوگی جہاں

$$\Delta \Delta = \text{ک مس لا}$$

$$\Delta \Delta = \text{ک مس ما}$$

اور
اس لئے

جم Δ ف Δ = جم لا جم ما + جب لا جب ما جم و
و کو مستقل سمجھ کر تفریق کرنے اور

$$\text{مف لا} = \text{ک مس لا}$$

$$\text{مف ما} = \text{ک مس ما}$$

رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

- جب ف Δ مف ف Δ = ک جب لا جم ما مس لا + ک جم لا جب ما مس ما
- ک جم لا جم لا جب ما مس لا - ک جم لا جب لا جم ما مس ما
= ک جب Δ (لا - ما) قط لا قط ما + ک جب Δ + ک جب لا جب ما
اب چونکہ یہ دونوں نہیں چھوٹی ہیں جملوں قط لا قط ما اور جب لا جب ما میں
لا = ما = ی (کسی ایک ستارہ کا راسی فاصلہ) رکھ سکتے ہیں - نیز چونکہ
و، ف چھوٹے ہیں ہم رکھ سکتے ہیں

$$\text{جب ف} = \text{ف} = \text{جب} \Delta \text{ (لا - ما)} = \text{ف} \Delta \text{ جم} \Delta \text{ طہ}$$

اور ۴ جب Δ $\frac{1}{4}$ Δ = Δ = ف Δ جب Δ طہ قم ی (۱۳۶)
اس لیے ف Δ میں سے جو مقدار انعطاف کی وجہ سے تفریق کرنی ہوگی وہ یہ ہے

$$\text{ک ف} \Delta \Delta \text{ جم} \Delta \text{ طہ مس ی}$$

یا اگر ک، ف، مف ف قوس کے ثانیوں میں بیان کئے گئے ہوں تو
ک ف Δ (۱ + جم Δ طہ مس ی) جب آ
سے ثانیوں کی وہ تعداد حاصل ہوگی جس قدر فاصلہ ف انعطاف
کی وجہ سے گھٹ چکا ہے - اس لیے یہ وہ تصحیح ہے جو دو قریبی ستاروں

درمیان بہانش شدہ فاصلہ پر عمل میں لانی ہوگی تاکہ انعطاف کے اثر کو رفع کیا جائے۔

اس کے بعد اب یہ ثابت کرنا ہے کہ زاویہ طہ جو این دو ستاروں کو ملاسنے والے خط اور انتصابی کے درمیان ہے انعطاف کی باعث ک جب طہ جم طہ مس ی کی حد تک بڑھ جاتا ہے۔

مساوات

$$ف جب طہ = جب ا جب ما$$

کا کو کارتی تفرقی لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ف}{ف} + مم طہ مف طہ = مم ما مف ما$$

جو اندراج سے ہو جاتا ہے

$$- ک (ا + جم طہ مس ی) + مم طہ مف طہ = - ک$$

اس لیے مف طہ = ک جب طہ جم طہ مس ی اور یہ وہ مقدار ہے جسے ظاہری زاویہ ب ا س میں سے تفرقی کرنا ہوگا تاکہ اصلی زاویہ ب ا س حاصل ہو۔

چاند یا سورج کی دائری قرص

کی شکل میں انعطاف کی باعث

جو بگاڑ واقع ہوتا ہے اسے حسب

طریقہ ذیل معلوم کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ سورج کا مرکز مس

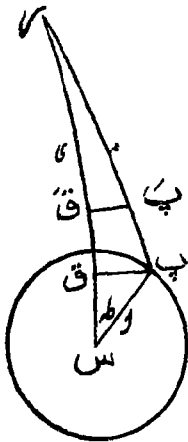
(شکل ۴۸) ہے اس کا نصف

قطر ا اس کے گھیرے پر کوئی

نقطہ پ اور اس سے ہے۔

فرض کرو کہ س مس ی۔ فرض کرو کہ

انعطاف کا مرکز ہے جس کی وجہ سے



شکل (۴۸)

پ میں پ تک ہٹاؤ واقع ہوتا ہے اور فرض کرو کہ پ ق اور پ ق سرس پر عمود ہیں۔ دفعہ گذشتہ کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ پ ق انعطاف کی باعث پ ق تک ہٹ جاتا ہے۔ اگر ہم سر کو مبداء قرار دیں اور سر کو لا کا محور اور اس طرح پ کے محدود لا اور ما ہوں تو

$$ما = پ ق = (ا - ک) پ ق = (ا - ک) جب ط$$

$$لا = سر ق = اجم ط + ق ق$$

$$= اجم ط + ک سر (ی - اجم ط)$$

$$= اجم ط + ک (سر ی - اجم ط ق ط ی)$$

اس لیے ط کو سا ق کر کے سے سورج کی منعطف شکل کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$ا = \frac{ما}{(ا - ک) پ ق} + \frac{(ا - ک) سر ی}{(ا - ک) ق ط ی}$$

(۱۳۷) اس کا محور اعظم (ا - ک) ہے اور محور اصغر (ا - ک ق ط ی)۔ ان

محوروں میں نسبت ا - ک سر ی ہے۔ بلاشبہ یہاں ک نیم قطری زاویوں میں ہے۔

ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی چھوٹی افقی قوس انعطاف کی وجہ سے نسبت ا - ک : ا میں گھٹ جاتی ہے اور کوئی چھوٹی انقبالی قوس جو ایک معتد بہ راسی فاصلہ پر ہو نسبت ا - ک ق ط ی : ا میں گھٹ جاتی ہے۔

مثال ۱۔ اگر دو قریبی ستاروں کے درمیان میل کا فرق ف ہو اور اگر ان میں سے ایک ستارہ کا راسی فاصلہ ی اور اختلاف منظری زاویہ عا ہو تو انعطاف کا اثر ہو گا کہ میل کا فرق بقدر

ک ف (ا + سر ی جیم عا) جب ا کے گھٹ جائیگا۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ انعطاف راسی فاصلہ کے ماس کے

متناسب ہے اور انعطاف کا مرکز ہے۔

پس ان دو ستاروں کو ملائے والی قوس کا ظل ان میں سے ایک ستارہ میں سے گزرنے والے ساعتی دائرہ پر ف ہے اور یہ ساعتی دائرہ راسی فاصلہ کے ساتھ زاویہ عا بناتا ہے۔

مثال ۲۔ عرض بلد $53^{\circ} 23' 37''$ ش میں موقعہ ایک رصد گاہ کی دور بین کو $8^{\circ} 39'$ شمالی میل کے توازی پر کے ایک نقطہ کی طرف لگایا گیا ہے اور گھنٹوں کے ساعتی زاویہ پر ثابت کیا گیا ہے۔ دو ستارے یکے بعد دیگرے میدان نظر میں سے گزرتے ہیں اور ان کے میل کا ظاہری فرق 1.2° ہے۔ ثابت کرو کہ انعطاف کا اثر رفع کرنے کے لیے اس فرق کو بقدر 1.09° کے بڑھانا ہوگا۔

(ان میں سے ایک ستارہ دجاجہ ۶۱ (61 cygni) ہے اور دوسرا ستارہ مقابلہ کرنے کے ان ستاروں میں سے ایک ہے جو رصد گاہ ڈنسنک (Dunsink) میں دجاجہ ۶۱ کا اختلاف منظر میل کے فرقوں کے طریقہ سے معلوم کرنے میں استعمال کئے گئے تھے۔)

مثال ۳۔ متعدد ستارے اپنے غیر منقطع مسلوں میں ایک چھوٹے منحنی پر واقع ہیں جس کی قطبی مساوات غ = ف (ط) ہے جہاں غ ایک بڑے دائرہ پر وہ فاصلہ ہے جو ایک نقطہ و سے جس کو مبداء قرار دیا گیا ہے منحنی پر کے ایک نقطہ پ تک ہے اور ط وہ زاویہ ہے جو و پ اور و س کے درمیان ہے جہاں س مشاہد کار اس ہے۔ ثابت کرو کہ انعطاف کا اثر ملحوظ رکھ کر منحنی کی قطبی مساوات حسب ذیل مساواتوں سے غ اور ط کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی:-

$$\text{غ} = \text{ف} (\text{ط})$$

$$\text{غ} = \text{غ} - \text{ک} (\text{ا} + \text{مس}^2 \text{ی} \text{جم}^2 \text{ط})$$

$$\text{ط} = \text{ط} + \text{ک} \text{جب} \text{ط} \text{جم}^2 \text{مس}^2 \text{ی}$$

جہاں غ وہ سمتی نیم قطر ہے جو نقطوں و اور پ کو ملاتا ہے جو علی الترتیب

و اور پ کے منعطف محل ہیں، اور طہ وہ زاویہ ہے جو و پ کے واسطے بناتا ہے۔

مثال ۴۔ سورج کا زاویہ قطر معلوم کرنا مقصود ہے۔ دو پیمائش کر

قطروں کا حسابی اوسط جو ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں ف ہے۔ انعطاف کا سرک ہے جو نیم قطری زاویوں میں بیان کیا گیا ہے اور سورج کے مرکز کا راستی فاصلہ

ی ہے۔ ثابت کرو کہ اصلی قطر ف (۱ + ک + پ ک مس ی) ہے خواہ

وہ زاویائے محل کچھ ہی ہوں جن میں یہ دو قطر جو ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں ناپے گئے تھے۔ (یہ سوال ایک نتیجہ پرستی ہے جو مشاہدات کرویہ ج

“Gr. Observations” کے مقدمہ میں درج ہے)

قطع ناقص کے مرکز سے نقطہ طہ کا فاصلہ ۱ (۱ - ک - ک جہ طہ مس ی) ہے۔ اس لیے طہ اور طہ + ۹۰ پر یعنی ایک دوسرے پر علی القوائم نیم

قطروں کا حسابی اوسط ۱ (۱ - ک - پ ک مس ی) = ۱ ف ہے اور

اس لیے ۱۲ = ف (۱ + ک + پ ک مس ی)

۴۹۔ انعطاف کا اثر ایک ہرے تارے کے زاویہ محل کی پیمائش پر۔

فرض کرو کہ اُس زوج کا صدر تارہ اور ثنائی تارہ علی الترتیب ا ب ہیں جن سے یہ دو ہر تارہ بنتا ہے اور فرض کرو کہ ق شمالی قطب ہے۔

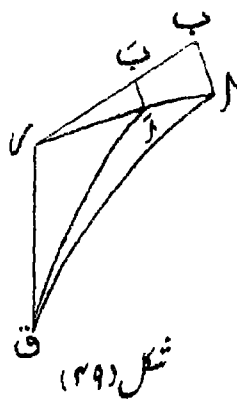
کرہ سماوی پر ایک دائرہ کا تصور کرو جس کا مرکز ا ہے اور جس کی درجہ بندی ایسی ہوئی ہے کہ مشاہد قطب ہے اور اق (۱۸۰) اس دائرہ کو صفر درجہ قطع کرتا ہے۔

وہ نقطہ جس میں ا ب اس درجہ دار دائرہ سے ملتا ہے ستارہ ا کے لحاظ سے ب کا زاویہ محل کہلاتا ہے۔ زاویہ محل کی پیمائش کے طریقہ کی مزید توضیح حسب ذیل کیجا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ دو ہر تارہ نصف النہار پر یا ا ب کے قریب ہے اور وہ اپنے بالائی ٹکبہ پر ہے اور ثنائی تارہ صدر تارہ کے مشرقی جانب ہے۔ تب زاویہ محل تقریباً ۹۰ ہے۔ لیکن اگر ثنائی تارہ مغربی جانب ہو تا جبکہ صدر تارہ نصف النہار پر ہو تو اس کا زاویہ محل

۲۷۰ ہوتا کیونکہ ہر صورت میں پوائنٹس کی سمت اس قوس سے جو قطب تک کسی بھی لائن پر
دری ہے۔ ہیئت وال اسے بالعموم سمت مش۔ چب۔ ج۔ (N.S.P.) کے نام سے جانتے ہیں کیونکہ یہ پوائنٹس شمالی نقطہ سے شروع ہو کر آسمان کے اس حصہ
کی جانب سے گزرتی ہیں جو یومی حرکت کے لحاظ سے پیچھے ہے اور پھر
جنوب کے گرد ہوتے ہوئے شمال کی طرف آسمان کے اس حصہ میں سے
واپس ہوتی ہے جو آگے ہے۔

اگر قی قطب 'س' راس 'اور دو ہرے تارہ 'ب' کا مدار تارہ
'ا' ہو (شکل ۴۹) تو زاویہ محل حسب تعریف مندرجہ بالا زاویہ قی 'ب'
ہے۔ انعطاف زاویہ محل کو



زاویہ قی 'ب' میں بدلتا
ہے۔ اس طرح انعطاف زاویہ
محل کو دو طریقوں سے بدلتا ہے
اولاً اختلاف منطری زاویہ
قی 'س' (ع) کو تبدیل کرتا
ہے اور ثانیاً زاویہ 'ب' 'س' کو۔
یہ دونوں زاویے انعطاف کی
باعث بدل جاتے ہیں اور شاہد
کردہ زاویہ محل پر جو تصحیح عمل میں

لائی ہوگی وہ اس صورت میں جو شکل (۴۹) میں ظاہر کی گئی ہے منفی ہونی
چاہئے۔ ہم اصلی زاویہ محل کو م سے تعبیر کریں گے۔

پس زاویہ 'ب' 'س' = م - عا، اور اس لیے (دفعہ ۴۸)
زاویہ 'ب' 'س' = م - عا + ک جب (م - عا) جم (م - عا) مس 'ی'
زاویہ قی 'ا' = م - عا + ک مس 'ی' - مس ضہ جب عا
پس اگر انعطاف کی باعث زاویہ محل کم ہو تو
م = م - عا + ک مس 'ی' - مس ضہ جب عا + ک جب (م - عا) جم (م - عا) مس 'ی'
(۱۳۹)

اگر اسی ابتدائی ستارے (صدر تارے) کے حوالے سے کسی دوسرے ستارے کے لیے متناظر ارقام مے اور م ہوں تو

مے = م + ک مس ی مس ض جب عا + ک جب (م - عا) جم (م - عا) مس ی
تفریق کرنے سے یہ آسانی حاصل ہوتا ہے

م - م = مے - مے - ک مس ی جب (م - م) جم (۲ - عا - م - م)

ستارہ ۱ یومی حرکت کی باعث جس سمت میں حرکت کرتا ہے اُس کا اصلی زاویہ محل م ۲۰۰ ہے اس لیے اگر یومی حرکت کی باعث ۱ کی حرکت کے لیے مشاہدہ کردہ زاویہ محل مے ہو تو

م = م + ۲۰۰ - مے + ک مس ی جم م جب (۲ - عا - م)

خلاصہ - گذشتہ دفعہ اور اس دفعہ سے کسی دوہرے تارے

کے مشاہدہ کردہ فاصلہ اور زاویہ محل کی اُس تصحیح کے لیے جو انعطاف کی باعث عمل میں لانی ہوگی حسب ذیل نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ دو ستاروں کا فاصلہ جس کو قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہو، ف ہے، ی راسی فاصلہ، م زاویہ محل، عا اختلاف منظری زاویہ، اور ک انعطاف کا سر قوس کے ثانیوں میں ہے تو اصلی فاصلہ

حاصل کرنے کے لیے جو تصحیح ظاہری فاصلہ میں جمع کرنی ہوگی وہ

ک ف { م + ک مس ی جم (م - عا) } جب ا

سلطہ ان تصحیحات کے اطلاق میں آسانی پیدا کرنے کے لیے جدولیں تیار کی گئی ہیں، ان کے لیے دیکھو

ہے۔ اور اصلی زاویہ محل حاصل کرنے کے لیے جو تصحیح پیمائش کردہ زاویہ محل میں جمع کرنی ہوگی وہ

ک مسن ی جم م جب (۲ عا۔ م)

ہے۔

مثال ۱: ستارہ سلیاق (عدہ) (a Lyra) کا سین ۳۸° ۳۰' ہے اور متصلہ ستارے کا زاویہ محل ۱۵۰° ۵۰' ہے۔ وہ تصحیح معلوم کر دو جو انعطاف کی باعث اس زاویہ محل پر عائد کرنی ہوگی جبکہ ساعتی زاویہ ۷ گھنٹے مغرب ہو عرض بلد ۵۳° ۲۳' ہو اور انعطاف کا سر ۵۸° ۲ ہو۔

اولاً راسی فاصلہ ۹° ۳۴' اور اختلاف منطری زاویہ ۳۸° ۳۰' کا محسوب کر لینا ضروری ہے۔ پھر ضابطہ سے تصحیح ۴۶' حاصل ہوتی ہے جو مشاہدہ کردہ زاویہ محل میں جمع کرنی ہوگی تاکہ اسے انعطاف کے اثر سے پاک کرے۔

انعطاف پر متفرق سوالات

(۱۴۰)

مثال ۱: ثابت کرو کہ انعطاف کسی جرم کے راسی فاصلہ کی جیب کو نسبت (۱-ک) میں گھٹاتا ہے جہاں ک انعطاف کا سر ہے۔

مثال ۲: ستارہ عقاب (عدہ) (a Aquilae) کا شمالی میل ۸° ۳۷' ہے۔ ثابت کرو کہ گرینویچ (عرض بلد ۵۱° ۲۸' ش) پر بوقت تکبید اس کا ظاہری راسی فاصلہ ۴۲° ۵۰' ہے اور اس امید (عرض بلد ۳۲° ۵۶' ج) پر ۳۲° ۵۰' ہے۔

مثال ۳: اگر افقی انعطاف ۳۵ ہو تو ثابت کرو کہ سورج کے طلوع یا غروب پر جبکہ اس کا میل ضد ہو سورج کے مرکز کے ساعتی زاویہ محل کے لیے ضابطہ حسب ذیل ہے

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ س} = \text{قط فہ قط ضد جم} (۲۵ + ۱۷۵ - \frac{1}{p} \text{ فہ} - \frac{1}{p} \text{ ضد}) \times$$

$$\text{جب} (۲۵ - ۱۷۵ - \frac{1}{p} \text{ فہ} - \frac{1}{p} \text{ ضد})$$

مثال ۳۔ اگر یہ مان لیا جائے کہ چاند بوقت طلوع اختلاف منظر کی باعث ۵۹ نیچے دب جاتا ہے اور انعطاف کی باعث ۳۵ مرتفع ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ اگر ساعتی زاویہ θ ہو اور میل ϕ نہ ہو تو گریونوج پر

$$\text{جم } \frac{1}{2} \text{ اس } = [120.57] \text{ قسطہ } \text{ضمہ } \text{جم } (19.42) - \frac{1}{2} \text{ ضہ } \text{جب } (19.42) - \frac{1}{2} \text{ ضہ } (19.42)$$

مثال ۵۔ گریونوج (عرض بلد $28^{\circ} 11'$) میں بتایا ہے کہ فروری ۱۸۹۳ء سورج کا میل بوقت طلوع $9^{\circ} 12'$ ج تھا۔ اس کا ظاہری ساعتی زاویہ معلوم کرو کہ یہ مان لیا جائے کہ افقی انعطاف 35 ہے۔

مثال ۶۔ ایک ستارے کے ظاہری راستہ کا ظل افق کے مستوی پر ایک قطع ناقص ہے جس کا خروج المرکز جم نہ ہے جہاں وہ عرض بلد ہے۔ یہ ستارہ قطب سے دور نہیں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس ستارہ کا راسی فاصلہ بہت بڑا نہ ہو تو وہی صورت انعطاف کی باعث بدے ہوئے ظاہری راستے کے لیے ہوگی۔ [Coll. Exam.]

مثال ۷۔ ستارہ دھابہ (عہ) (a Cygni) کا شمالی میل $54^{\circ} 52'$ ہے (۱۹۰۹ء)۔ ثابت کرو کہ عرض بلد $53^{\circ} 23'$ اور $54^{\circ} 25'$ درمیان تکبدوں کے وقت اس کے ظاہری راسی فاصلے علی الترتیب $9^{\circ} 25'$ اور $8^{\circ} 32'$ ہیں یہ مان لیا گیا ہے کہ انعطاف 58.29 مس ی - 60.66 مس ی

لیا جاسکتا ہے جہاں ی = ظاہری راسی فاصلہ۔

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ اگر کسی خاص آن پر ایک ستارہ کا میل انعطاف سے غیر متاثر ہو تو یہ ستارہ قطب اور اس کے درمیان تکبد کرتا ہے اور اس کا سمت زیر بحث آن پر اعظم ہے۔ [Math. Trip 1]

ستارہ قطب کے گرد جو چھوٹا دائرہ رسم کرتا ہے اس کو مس کرتا ہو ایک بڑا دائرہ اس سے کہینچا جائے تو اس سے وہ نقطہ حاصل ہوتا ہے جہاں ستارہ کا

راسی فاصلہ اس کے قطبی فاصلہ پر علی القوا لم ہوگا۔ یہ ظاہر ہے کہ ستارہ جس وقت نقطہ تماس پر واقع ہو تو اس کا سمت بڑے سے بڑا ہوگا اور اس سے بڑا سمت اس سے کبھی حاصل نہیں ہو سکتا۔

مثال ۹۔ ثابت کرو کہ راسی فاصلہ کے ان حدود کے اندر نہیں (۱۴۱) انعطاف کو ک مس ی (یعنی ک یا راسی فاصلہ کا ماس) لیا جاسکتا ہے کسی ستارہ کا ظاہری مقام ایک کو کبی یوم میں ایک مخروطی تراش مرسم کرتا ہے جو قطع ناقص یا قطع زائد ہوگی بہو جب اس کے کہ جب ف نہ ک جم ضہ ابھاں نہ ستارہ کا میل ہے اور فہ مقام کا عرض بلد۔ اُس بڑے دائرہ کو جو ستارہ کے اصلی مقام سے قطب تک کھینچا گیا ہو لا کا محور لینے سے منقطع مقام کے مستوی محدود

لا = ک مس ی جم عا ، ما = ک مس ی جب عا
حاصل ہوتے ہیں جہاں ی اور عا علی الترتیب راسی فاصلہ اور اختلاف منظر زاویہ ہیں۔ کر دی مثلث سے

جب ی جب عا = جم فہ جب ت ک جب ی جم عا = جم ضہ جب فہ۔ جب ضہ جم فہ جم ت
جم ی = جب ضہ جب فہ + جم ضہ جم فہ جم ت
لا = ک جم ضہ جب فہ۔ ک جب ضہ جم فہ جم ت ، ما = ک جم فہ جب ت
جب ضہ جب فہ + جم ضہ جم فہ جم ت = جب ضہ جب فہ + جم ضہ جم فہ جم ت
ان سے حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} \text{جب ت} &= \text{مس فہ} \frac{\text{ما}}{\text{لا جم ضہ} + \text{ک جب ضہ}} \\ \text{جم ت} &= \text{مس فہ} \frac{\text{ک جم ضہ} - \text{لا جب ضہ}}{\text{لا جم ضہ} + \text{ک جب ضہ}} \end{aligned}$$

اس لیے تاکو ساقط کرنے سے
ما + (ک جم ضہ - لا جب ضہ) = مم فہ (لا جم ضہ + ک جب ضہ)
جسے لکھا جاسکتا ہے

لا (جب فہ - جم فہ) + ما جب فہ - لا جب فہ - ک (جب فہ - جب فہ) =
اور یہ ایک قطع ناقص ہے یا قطع زاہد بموجب اس کے کہ جب فہ - جم فہ مثبت
ہو یا منفی۔

مثال ۱۰۔ یہ نسیم کر کے کہ انعطاف ایک چھوٹی مقدار ہے اور
اسی فاصلہ کے متناسب بہ نسبت ثابتہ کرو کہ اگر ایک ہی ستارہ کو مختلف مقامات
سے جو ایک ہی نصف النہار پر واقع ہیں ایک ساتھ مشاہدہ کیا جائے تو اس کے
ظاہری مقامات ایک بڑے دائرہ کی قوس پر واقع ہوتے ہیں۔

[Coll. Exam.]

یہ سوال حسب ذیل ہندسی مسئلہ سے جو آسانی سے ربعی مثلثوں کے
قاعدوں سے ثابت ہوتا ہے (دیکھو صفحہ ۸) فوراً حل ہو جاتا ہے۔ اگر دو
ایک رُبع ہو اور و میں سے گزرنے والا ایک متغیر بڑا دائرہ دو ثابت بڑے
دائرہوں کو جو ا میں سے گزرتے ہیں علی الترتیب پ اور ق میں قطع
کرے تو س و پ اس وق مستقل ہے۔

مثال ۱۱۔ اگر ایک ستارہ کامیل فہ ہو تو ثابت کرو کہ اگر افقی انعطاف
ع ہو تو ستارہ کے طلوع کا وقت ایک مقام پر جس کا عرض بلد فہ ہے تقریباً

$$\frac{ع}{۱۵۰ جم فہ - جب فہ}$$

کے تبدیل ہوتا ہے۔

حسب معمول ترقیم سے

$$جم ی = جب فہ جب فہ + جم فہ جم فہ$$

(۱۳۲)

تفرق کرنے سے

$$مف ی = جم فہ جم فہ جب فہ ت مف ت$$

لیکن ستارہ چونکہ افق پر ہے اس لیے جب ی = ۱ اور

$$۰ = جم ی = جب فہ جب فہ + جم فہ جم فہ ت$$

$$\begin{aligned} \text{جم ذہ جم ضہ جب ت} &= (\text{جم ذہ جم ضہ} - \text{جم ذہ جم ضہ جب ت}) \\ &= (\text{جم ذہ جم ضہ} - \text{جب ذہ جب ضہ}) \\ &= (\text{جم ضہ} - \text{جب ذہ}) \end{aligned}$$

اس لیے مف ی = (جم ضہ - جب ذہ) مف ت
اگر مف ی قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہو اور مف ت وقت کے
ن تائے ہوں تو ہم رکھتے ہیں مف ی = ع اور مف ت = ۱۵ ن جن
ن کے لیے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۲۔ یہ تسلیم کر کے کہ ایک ستارہ کے راہی فاصلہ ی میں
انعطاف کی باعث تغیر ک مس ی ہے جہاں ک چھوٹا ہے ثابت کرو کہ
عرض بلدہ میں ایک مائظ قطبی ستارہ کے ساعتی زاویہ میں پیدا شدہ تبدیلی
بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ زاویہ ق س قش ایک قائمہ زاویہ ہو جہاں
ق قطب، س ستارہ، اور قش افق کا شمالی نقطہ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ
اس تبدیلی کی اعظم قیمت

$$\text{ک مس ذہ قط ضہ} \mid \text{قط ی، قط ی}$$

ہے جہاں ی، اور ی، ستارے کے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے
راہی فاصلے ہیں۔

ساعتی زاوے س میں انعطاف کی باعث تبدیلی ک قط ضہ جم ذہ
x جب س قط ی ہے اور اگر جب س قط ی اعظم ہو تو نقطہ س قش سے
۹۰ ہے جہاں س، س ق کوق سے اتنا فاصلہ کر کے حاصل کیا گیا
ہے کہ س س = ۹۰۔

مثال ۱۳۔ یہ تسلیم کر کے کہ کسی جرم س کا انعطاف = ک مس س
ثابت کرو کہ ص۔ ہ اور قش۔ ق۔ ف میں انعطاف کے اجزاء

تحلیل جن کو علی الترتیب وقت کے ثانیوں اور قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہو تقریباً
 ک $\frac{\text{س ر ل}}{\text{س ر ل}}$ اور ک س (ف ق ل)
 ۱۵ جب ف جم (ف - ق ل)
 میں جہاں ف جرم کا شمال قطبی فاصلہ ہے، ق قطب، اور س ر ل ایک
 بڑے دائرہ کی قوس ہے جو ک سے ق س پر عمود کھینچی گئی ہے۔

مثال ۱۲۔ فرض کرو کہ مشاہد کا عرض بلد ف، ایک ستارہ کا میل
 منہ، اس کا مغربی ساعتی زاویہ س، اور انعطاف کا سر ۸۵۳۴ ہے۔ ثابت
 کرو کہ انعطاف کی وجہ سے ساعتی زاویہ کی تبدیلی کی ظاہری شرح میں
 ۲۴۱۵ جب م جم م (مس منہ + مم فہ ق س) قم (منہ + م) فی یوم
 کی کمی ہوتی ہے جہاں مس م = مم فہ جم س۔
 نیز ثابت کرو کہ میل میں انعطاف کی شرح تبدیلی
 ۱۵۳۳ + مم فہ جب س قم (منہ + م) جم م فی گھنٹہ
 ہے۔

(۱۴۳)

انعطاف ستارہ کو اس کی طرف اس کے اصلی مقام س سے
 ظاہری مقام س تک اٹھاتا ہے۔ فرض کرو کہ اصلی ساعتی زاویہ س
 ہے اور ظاہری ساعتی زاویہ س ہے۔ قوس ر ل = ۹۰۔ ن کو ق س
 پر عمود کھینچو (شکل ۵۰)

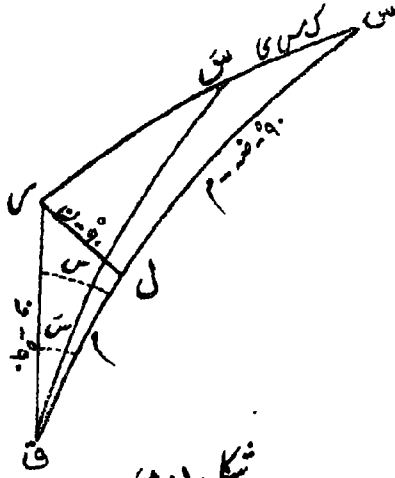
$$\begin{aligned} (س - س) \text{ جم منہ} &= ک مس ی جب ر س ل \\ &= ک جم ن ق ی \\ &= ک جم فہ جب س \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{جب فہ جب منہ} + \text{جم فہ جم منہ جم س}}$$

ت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

$$\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} - \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \right) \text{ جم منہ}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\text{کج فہ جم س (جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س) + جم فہ جم ضہ جیہ س فرس}}{\text{فرت (جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س)}} \\
 &= \frac{\text{کج فہ جم فہ جم ضہ + جب فہ جب ضہ جم س فرس}}{\text{فرت جم س}} \\
 &= \frac{\text{کج فہ جم فہ جم ضہ جم س (س س نہ + مم فہ قط س) فرس}}{\text{فرت جب س (ضہ + م) جب س}} \\
 &= \frac{\text{کج فہ جم فہ جم ضہ جم س جم س (س س نہ + مم فہ قط س) فرس}}{\text{فرت جب س (ضہ + م) جب س}} \\
 &= \frac{\text{کج فہ جب م جم م مس ضہ + مم فہ قط س فرس}}{\text{فرت جب س (ضہ + م) جب س}}
 \end{aligned}$$



شکل (۵۰)

(۱۳۴) ایک کوکبی یوم میں ثانیوں کی تعداد ۸۶۴۰۰ ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ ۸۶۴۰۰ + ثانیوں کی وہ تعداد ہے جو ایک مکمل گردش کے لیے مطلوب ہے اگر ستارہ کا ظاہری ساعتی زاویہ پورے دن اسی شرح سے بڑھتا جا رہا رہے جو زیر بحث لمحہ پر تھی۔ پس

$$\frac{\pi ۲}{۸۶۴۰۰} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \quad \text{اور اس لیے} \quad \frac{\pi ۲}{۸۶۴۰۰} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$$

اور اس لیے

$$\frac{\pi ۲}{۸۶۴۰۰} = \left(\frac{\pi ۲}{۸۶۴۰۰} - \frac{\pi ۲}{۸۶۴۰۰} \right) = \text{ک جب م جم م مس ضہ + مم فہ قط س}$$

 چونکہ ع بہت چھوٹا ہے اس لیے ک = ۵۸۶۴ \ ۲۰۶۲۶۵ رکھنے سے
 ع = ۲۲۶۵ ش جب م جم م (مس ضہ + مم فہ قط س) قم (ضہ + م)
 جس میں کسی استوائی ستارہ کے لیے
 مس م = مم فہ جم س

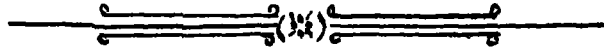
$$\text{ضہ} = ۰ \text{ اور ع} = ۲۲۶۵ \text{ مم م مم فہ قط س}$$

۲۲۶۵ = قط س
 اس طرح کوئی استوائی ستارہ خواہ وہ نصف النہار کے کسی جانب اسکے
 قریب ہی کیوں نہ ہو انعطاف سے اس طور پر متاثر ہوتا ہے کہ وہ ایک ایسی
 لوکھی گھڑی کے ساتھ دقت میں برابر رہتا ہے جو فی یوم ۲۲۶۵ کی شرح سے
 سست رہے۔

اگر میل میں انعطاف لا ہو جسے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہو تو
 لا = ک مس ی جم س س ل
 = ک مس (۹۰ - ضہ - م) = ک مم (ضہ + م)
 اس لیے تفرق کرنے اور مف لا، مف م، اور مف س سب کو
 قوس کے ثانیوں میں بیان کیا ہوا سمجھنے سے
 مف لا = ک قم (ضہ + م) مف م جب آ
 لیکن مس م = مم فہ جم س
 قط م مف م = مم فہ جب س مف س
 اس لیے قط م مف لا = ک قم (ضہ + م) مم فہ جب س مف س جب آ

اگر مش' قوس کے ثانیوں میں بیان کردہ وہ شرح فی ساعت ہو جس سے میل بدل رہا ہے تو مف لا \ مف س = مش ۱۵ × ۶۰ × ۶۰ -
 ان اندراجات کو عمل میں لانے سے اور ک اور جب آ کی قیمتیں داخل کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے یعنی

مش = ۱۵، ۳ آ م فہ جب س قم^۲ (ضہ + م) جم^۲ م
 یہ نتیجہ مساوی عکاسی (فوٹو گرافی) کے فن میں علمی اہمیت رکھتے ہیں۔



ساتواں باب

کیپلاور نیوٹن کے کھلے اور انکا استعمال

صفحہ

دفعہ

۵۰۔ وہ کھلے جن کی بموجب سیارے سورج کے گرد حرکت

کرتے ہیں اور جو ان کے موجب کیپلر کے نام سے موسوم ہیں

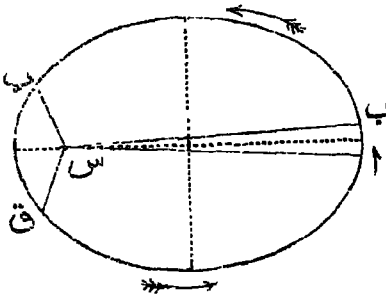
۵۱۔ سورج کی ظاہری حرکت

۵۲۔ ناقصی حرکت محسوب کرنا

۵۳۔ ناقصی حرکت کے وہ ضابطے جو تریخوں کے ذریعہ بیان کئے گئے ہیں

۵۰۔ کیپلاور نیوٹن کے کھلے۔

وہ کھلے جن کی بموجب



شکل (۵۱)

سیارے سورج کے گرد حرکت کرتے ہیں اور جو ان کے موجب کیپلر کے نام سے موسوم ہیں حسب ذیل ہیں۔

(۱) ہر سیارہ کا مدار سورج کے

گرد ایک قطع ناقص ہے جس کے

ایک ماسکہ پر سورج کا مرکز واقع ہے۔
فرض کرو کہ اس (شکل ۵۱) سورج کا مرکز ہے تو کسی سیارہ کا مدار $ABPQ$ ایک قطع ناقص ہے جس کا ایک ماسکہ اس ہے۔
سیارہ کی رفتار مستقل نہیں ہوتی اور وہ کلیہ جس کی بموجب اس کی چال بدلتی ہے کپلر کے دوسرے کلیہ سے ملتا ہے۔

(۲) وہ سمتی نیم قطر جو سورج کے مرکز سے سیارہ تک کھینچا جائے مساوی وقتوں میں مساوی رقبے عبور کرتا ہے۔
مثلاً قطع ناقص پر کوئی دو نقطے A و B ہو اور نیز دیگر دو نقطے P و Q تو اگر رقبہ A میں B = رقبہ P میں Q تو سیارہ جتنے وقت میں A کو مرسم کرے گا اتنے ہی وقت میں P کو مرسم کرے گا۔ اس سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ شکل بالا میں تعبیر شدہ نقطوں کے لحاظ سے سیارہ کی رفتار $ABPQ$ مرسم کرنے وقت اس رفتار سے بڑی ہوتی ہے جو اس کی A مرسم کرتے وقت ہے۔

کپلر کے پہلے دو کلیہ میں صرف ایک واحد سیارہ کی حرکت سے تعلق ہوتا ہے۔ کپلر کے تیسرے کلیہ سے دو مختلف سیاروں کی حرکتوں کے درمیان ایک مشہور رشتہ حاصل ہوتا ہے۔ کسی سیارے کے اوسط فاصلہ کی تعریف ہم یہ کریں گے کہ وہ سیارہ کے مدار کا نیم محور اعظم ہے اور اس کی مدت دوران یا دوری مدت کی تعریف اس وقفہ سے کی جائیگی جس میں سیارہ اپنے مدار کے پورے محیط کو طے کر لیتا ہے۔ اب کپلر کا تیسرا کلیہ اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے:-

(۳) دو سیاروں کی دوری مدتوں کے مربع وہی نسبت رکھتے ہیں جو سورج سے انکے اوسط فاصلوں کے مکعبوں کے درمیان ہوتی ہے۔

مثال۔ زمین اور زہرہ کی دوری مدتیں علی الترتیب ۳۶۵۱۳ دن اور ۲۲۴۶ دن ہیں اور ان دوری مدتوں کے مربعوں میں نسبت

$$\frac{(36513)^2}{(2246)^2} = \frac{26643}{1}$$
 ہے۔ یورج سے ان کے اوسط فاصلے ۱ اور ۰.۷۱۳ ہیں پس چونکہ $\frac{1}{(0.713)^2}$ $= \frac{26643}{1}$ اس لیے ان دو سیاروں کے لیے کیپلر کے تیسرے قانون کی تصدیق ہو گئی۔

کیپلر کے یہ تین کٹے جو اوپر بیان ہوئے ہیں بالکل سیاروں کی حرکتوں کے مشاہدات سے کیپلر نے اخذ کئے تھے اور ان کے اخذ کرنے میں ان قوتوں کا کہیں ذکر نہیں ہے جن کے تحت یہ حرکتیں جاری ہیں بلکہ صدی سے زیادہ عرصہ تک یہ کٹے بغیر شرح کے محض واقعات کے طور پر قائم رہے۔ اسکے بعد نیوٹن نے ثابت کیا کہ یہ کٹے اس عالمگیر قانون تجاذب کے لازمی نتیجے ہیں جو کائنات کے ہر مادی ذرہ کی حرکت پر جاری نظر آتا ہے۔ حرکت کے وہ تین کٹے جس پر علم حرکت کی عمارت تعمیر ہوئی ہے اور جو بالعموم نیوٹن کے کلیوں کے طور پر معروف ہیں حسب طریقہ ذیل بیان کئے جاسکتے ہیں :-

کلیہ ۱۔ ہر جسم اپنی سکون کی حالت میں یا ایک خط مستقیم میں اپنی یکساں حرکت کی حالت میں رہتا ہے تا آنکہ وہ عامل قوتوں سے اپنی حالت بدلنے پر مجبور ہو جائے۔

کلیہ ۲۔ حرکت کی تبدیلی قوت عاملہ کے متناسب ہوتی ہے اور اس خط مستقیم کی سمت میں واقع ہوتی ہے جس میں یہ قوت عمل کرتی ہے۔

کلیہ ۳۔ ہر عمل کے جواب میں اس کے مساوی اور مخالف

ایک تعامل ہوتا ہے، یا کسی دو جسموں کے باہمی عمل مساوی اور مخالف سمتوں میں ہوتے ہیں۔

حرکت کی تبدیلی سے نیوٹن کی مراد معیار حرکت کی شرح تبدیلی

(۱۴۷) ہے یعنی متحرک جسم کی کمیت اور اس کی رفتار کی شرح تبدیلی کا حاصل ضرب جسے دوسرے لفظوں میں کمیت اور اسراع کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ کلیہ ۲ کی بنیاد پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ حرکت کی تبدیلی (مثلاً کسی سیارہ کی صورت میں) قوت عاملہ کے متناسب ہوتی ہے اور اس خط مستقیم کی سمت میں واقع ہوتی ہے جس میں قوت عمل کرتی ہے۔

کپلر کے پہلے اور دوسرے کلیوں سے نیوٹن نے یہ ثابت کیا کہ ہر سیارہ ایک ایسی قوت کے زیر اثر حرکت کرتا ہے جس کی سمت ہمیشہ سورج کی طرف ہوتی ہے اور جو سورج سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے۔ کپلر کے تیسرے کلیہ سے نیوٹن نے ایک سیارہ کے اسراع کا مقابلہ دوسرے سیارہ کے اسراع کے ساتھ کیا اور اس سے وہ اس عالمگیر مجاذب کے قانون پر

پہنچا جس کے ساتھ اس کا نام وابستہ ہے اور جو یہ ہے کہ مادہ کا ہر ذرہ ہر دوسرے

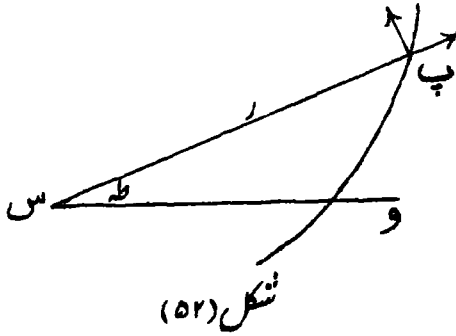
ذرہ کو ایک ایسی قوت سے کشش کرتا ہے جو انکی کمیتوں کے

حاصل ضرب کے بالراست اور ان کے درمیانی فاصلہ کے مربع کے

بالعکس متناسب ہوتی ہے۔

ہم اول یہ ثابت کریں گے کہ اگر وہ سمتی نیم قطر جو ایک ثابت نقطہ سے ایک متحرک ذرہ تک کھینچا گیا ہو مساوی وقوتوں میں مساوی رقبے عبور کرے تو ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کی سمت ہمیشہ اس ثابت نقطہ کی طرف ہوتی چاہئے۔

اگر سمتی نیم قطر س پ 'ر ہو اور طہ وہ زاویہ جو یہ سمتی نیم قطر کسی
ثابت سمت س و کے ساتھ بناتا ہے تو س پ پر اور اس کے
علی القوائم



رقبائیں علی الترتیب

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} \text{ اور } \frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر ت}}$$

ہیں۔

صغیر وقت م ف ت کے بعد متصلہ سمتی نیم قطر پر اور اس کے
علی القوائم رقبائیں

فر ر + م ف ت فر ر ، ر فر طہ + م ف ت فر (ر فر طہ)
ہوئی۔ (ان رقبائوں کو ابتدائی سمتی نیم قطر کی سمت میں تحلیل کرنے سے) جس کے
ساتھ متصلہ سمتی نیم قطر زاویہ م ف ت x فر طہ \فر ت بناتا ہے) حاصل
ہوتا ہے (۱۲۸)

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} + \text{م ف ت فر ر} - \text{م ف ت فر طہ فر طہ}$$

اس لیے اگر س کی طرف اسراع - ف ہو تو

$$- ف = \frac{فر}{فرت} - ر \left(\frac{فرط}{فرت} \right)$$

اسی طرح رفتاروں کو ابتدائی سمتی نیم قطر کے عمود وار تحلیل کرنے سے اس سمت میں جزو تحلیل حاصل ہوتا ہے

$$ر \frac{فرط}{فرت} + م ف ت \frac{فر}{فرت} \left(ر \frac{فرط}{فرت} \right) = م ف ت \frac{فر}{فرت}$$

اس لیے ابتدائی سمتی نیم قطر کے عمود وار اسراع کے لیے جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ر}{فرت} \frac{فر}{فرت} \left(ر \frac{فرط}{فرت} \right)$$

سمتی نیم قطر وقت م ف ت میں بقدر قیہ عبور کرتا ہے اس کا ڈگنا $ر$ فرط ہے اور اگر یہ دو مقادیر مستقل نسبت رکھتی ہوں جیسا کہ کپلر کے دوسرے کلیہ کی بموجب ایک سیارہ کی حرکت کی صورت میں درست ہے تو

$$ر \frac{فرط}{فرت} = م ، مستقلاً$$

$$\text{اور اس لیے } \frac{ر}{فرت} \frac{فر}{فرت} \left(ر \frac{فرط}{فرت} \right) = ۰$$

پس سمتی نیم قطر کے علی القوائم نہ کوئی اسراع ہے، نہ کوئی حرکت کی تبدیلی، اور اس لیے نیوٹن کے دوسرے کلیہ کی بموجب کوئی قوت بھی نہیں ہے۔ اس لیے پوری قوت، اس کی طرف ہے۔ اسی طرح کپلر کا دوسرا کلیہ اس امر کو ثابت کرتا ہے کہ سیارے ایک ایسی قوت کے زیر عمل حرکت کرتے ہیں جس کی سمت ہمیشہ سورج کے مرکز کی طرف رہتی ہے۔ ثانیاً یہ ثابت کرنا ہے کہ اگر کوئی جسم ایک قوت کے تحت ایک مخروطی تراش میں حرکت کرے اور اس قوت کی سمت ہمیشہ اس مخروطی تراش کے ایک ماسکے کی طرف ہو اور اگر یہ جسم اس طور پر حرکت کرے کہ وہ سمتی نیم قطر جو اس ماسکے سے جسم تک کھینچا گیا ہو مساوی وقتوں میں مساوی

رتبہ عبور کرے تو قوت اس ماسکی سمتی نیم قطر کے مربع کے بالعکس متناسب ہونی چاہئے۔
اس ماسک کے حوالے سے مخروطی کی مساوات ہے

(۱۴۹) جہاں l نیم وتر خاص ہے، z خروج المرکز اور $ط$ وہ زاویہ جو سمتی نیم قطر (ر) اس خط کے ساتھ بناتا ہے جو خلیض کو ماسک سے ملتا ہے (دفعہ ۵۲)۔
اس طرح ہمیں حسب ذیل تین مساواتیں ملتی ہیں

$$r = l \sqrt{(1 + z \text{ جم } ط)} \quad (۱)$$

$$\frac{r^2}{\text{فرت}^2} - r \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} \right) = -f \quad (۲)$$

$$\text{اور} \quad \frac{r}{\text{فرت}} = m \quad (۳)$$

ان مساواتوں سے f یعنی سورج کی طرف اسراع معلوم کیا جاسکتا ہے چنانچہ (۱) کو تفرق کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{r}{\text{فرت}} = \frac{l \text{ زجب } ط}{\text{فرت}} \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} = \frac{z \text{ زجب } ط}{\text{فرت}} \frac{r}{\text{فرت}} = \frac{m \text{ زجب } ط}{\text{فرت}} = \frac{m}{\text{فرت}}$$

$$\text{اور} \quad \frac{r^2}{\text{فرت}^2} = \frac{m \text{ زجب } ط}{\text{فرت}} = \frac{m}{\text{فرت}}$$

$$\text{نیز} \quad r \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} \right) = \frac{r}{\text{فرت}}$$

$$\text{اور اس لیے} \quad \frac{r^2}{\text{فرت}^2} - r \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} \right) =$$

$$= \frac{m}{\text{فرت}} \left\{ \frac{\text{زجب } ط}{\text{فرت}} - \frac{1}{\text{فرت}} \right\}$$

$$= \frac{m}{\text{فرت}} \left\{ \frac{\text{زجب } ط}{\text{فرت}} - \frac{1}{\text{فرت}} \right\} = \frac{m}{\text{فرت}}$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اسراع اور اس لیے قوت مدار کے ہر نقطہ پر
ماسکہ سے فاصلہ کے مربع کے یا لکس بدلتی ہے۔ یہ نتیجہ درست ہے خواہ
ز کی قیمت کچھ ہی ہو مدار ایک قطع ناقص ہو یا ایک قطع زائد یا ایک قطع
مکافی۔

اگر ہم اسراع کو $\frac{1}{r}$ سے تعبیر کریں جہاں r ، اکائی فاصلہ پر سورج
کی کشش کی وجہ سے اسراع ہے تو مندرجہ بالا ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے
 $\frac{1}{r} = \frac{v^2}{r}$ (۴)
اب ہم کیپلر کے تیسرے کلیئے سے یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ مستقل
 r سب سیاروں کے لیے ایک ہی ہے۔ کیونکہ $\frac{1}{r}$ وقت کی اکائی میں
مستعد قہ کا ڈگنا ہے اور اس لیے اگر مدت دوران d ہو تو کیپلر کے دوسرے
کلیئے سے ہمیں حاصل ہونا چاہئے

$$\frac{1}{r} = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{d^2} \quad \text{لیکن } \frac{1}{r} = \frac{v^2}{r} \text{ اس لیے (۴) کے ذریعہ}$$

لیکن کیپلر کے تیسرے کلیئے کی بہ وجہ $\frac{1}{r} = \frac{v^2}{r}$ سب سیاروں کے لیے
وہی ہے اور اس لیے r ، یورے نظام شمسی میں مستقل ہے۔
اگر کسی سیارے کے مرکز سے طریقی اشمس پر عمود کھینچا جائے تو
سورج کے مرکز اور r میں سے گزرنے والے ایک خط کو اس عمود سے
ملنے کے لیے طریقی اشمس کے مستوی میں مثبت سمت میں جس قدر زاویہ
سے گھماتا پڑتا ہے اس کو سیارہ کا شمس مرکزی طول بلد کہتے ہیں۔ سورج
کے ارض مرکزی طول بلد میں اگر 180° جمع کئے جائیں تو زمین کا شمس مرکزی
طول بلد حاصل ہوتا ہے۔

دو سیاروں کی اقترانی مدت سے مراد ان دو متصلہ موقعوں کے
درمیان اوسط وقفہ ہے جن پر یہ سیارے اقتران میں ہوتے ہیں یعنی
ایک ہی شمس مرکزی طول بلد رکھتے ہیں۔ اگر وہ ایک ہی مستوی میں

دائری مداروں پر یکساں رفتار سے حرکت کریں اور اگر ان کے دور علی الترتیب د، د ہوں اور وقت ت پر ان کے شمس مرکزی طول بلد ل، ل ہوں تو

$$ل = \pi^2 \text{ ت} \sqrt{د + ل}$$

$$ل = \pi^2 \text{ ت} \sqrt{د + ل}$$

جہاں ل اور ل، وقت ت = ۰ پر طول بلد کو تعبیر کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ اترانی مدت لا ہے اور ت وہ وقت ہے جبکہ ل = ۰۔

تو ت + لا وہ وقت ہو گا جبکہ یہ سیارے پھر اتران میں ہوں گے اور اس وقت ل = ل = π^2 (اگر د < د)۔ پس مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$۰ = \pi^2 \text{ ت} \sqrt{د - ل} - \pi^2 \text{ ت} \sqrt{د + ل}$$

$$\pi^2 = \pi^2 (ت + لا) \sqrt{د - ل} - \pi^2 (ت + لا) \sqrt{د + ل}$$

اس لیے تفریق کرنے سے

$$لا = د \sqrt{د - ل} - د \sqrt{د + ل}$$

اگر ان میں سے ایک سیارہ زمین ہو، سال وقت کی اکائی زمین کا اوسط فاصلہ طول کی اکائی، اور د دوسرے سیارہ کا اوسط فاصلہ سورج سے تو کپلر کے تیسرے کلیئے سے کسی بیرونی سیارے کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$لا = د \sqrt{\frac{د}{د - ل}} - د \sqrt{\frac{د}{د + ل}}$$

اور کسی اندرونی سیارے کے لیے

$$لا = د \sqrt{\frac{د}{د + ل}} - د \sqrt{\frac{د}{د - ل}}$$

مثال ۱۔ یہ فرض کر کے کہ زمین کا اوسط فاصلہ سورج سے ۹۲،۵۹ (اکائی..... امیل) ہے اور زمین کے مدار کا خروج المکرز ۱۶۸۔۶ ہے اس مربع کا

لہ بیرونی سیارہ سے مراد وہ سیارہ ہے جس کا مدار زمین کے مدار کے باہر ہے اور اندرونی سیارہ سے مراد وہ سیارہ جس کا مدار زمین کے مدار کے اندر واقع ہے۔ مترجم

ضلع معلوم کرو جس کا رقبہ اُس رقبہ کے مساوی ہو جو زمین کا سمتی نیم قطر روزانہ عبور کرتا ہے۔

نوٹ :- ایک سال ہمیشہ ۳۶۵،۲۵ اوسط شمسی ایام کا لیا جاسکتا ہے جب تک کہ اس کے خلاف نہ کہا گیا ہو۔

مثال ۲۔ اگر قضیض اور آج پر ایک سیارہ کی رفتاریں علی الترتیب m و m' ہوں اور اگر اسکے مدار کا خروج المرکز نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$(1 - z) m = (1 + z) m'$$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ کسی آن ایک سیارہ کی رفتار دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کی جاسکتی ہے ایک m ان جو سمتی نیم قطر پر عمود ہو اور دوسرے m' ان جو مدار کے محورِ اعظم پر عمود ہو۔

مثال ۴۔ کپلر کے دوسرے اور تیسرے کلیوں سے ثابت کرو کہ نظام شمسی کے کوئی دو سیارے ایک دے ہوئے وقت میں جو رقبہ عبور کرتے ہیں ان کی نسبت ان کے وترِ خاص کے جذر المرجوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

مثال ۵۔ مشتری کا اوسط فاصلہ سورج سے ۵،۲۰۳ ہے جبکہ طول کی اکائی سورج سے زمین کا اوسط فاصلہ ہو۔ مشتری کی مدت دوران ۱۱،۸۶۲ سال اور عطارد کی مدت دوران ۰،۲۴۰۸ سال ہے۔ ثابت کرو کہ سورج سے عطارد کا فاصلہ ۰،۳۸۷ ہے۔

مثال ۶۔ مریخ کے مدار کا خروج المرکز ۰،۰۹۳۳ ہے اور سورج سے اس کا اوسط فاصلہ سورج سے زمین کے فاصلہ کا ۵،۲۳۷ اگنا ہے۔ یہ مان کر کہ زمین کا فاصلہ سورج سے ۹۲۹،۰۰۰ میل ہے اور اس کے مدار کا خروج المرکز نظر انداز کیا جاسکتا ہے زمین سے مریخ کے بڑے سے بڑے اور کم سے کم ممکن فاصلوں کی تعیین کرو۔

مثال ۷۔ اگر ایک سیارہ کی مدت دوران d ہو اور اس کے نیم محورِ اعظم کا طول a تو ثابت کرو کہ نیم محورِ اعظم میں ایک چھوٹی تبدیلی δa کی وجہ سے مدت دوران میں تبدیلی δd مف $\frac{1}{2} \delta a$ پیدا ہوگی۔

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ کسی سیارہ کی حرکت میں جو ایک ناقصی مدار پر سورج کے گرد حسب قانون قدرت حرکت کرتا ہے غیر مقبوضہ ماسک کے گرد زاویائی رفتار ایسے بدلتی ہے جیسے سمتی نیم قطر اور ماس کے درمیانی زاویہ کی جیب کا مربع۔
فرض کرو کہ قطع ناقص کی ایک چھوٹی قوس فرس ہے جو سورج سے رفاصلہ پر اور غیر مقبوضہ ماسک سے رفاصلہ پر ہے۔ فرض کرو کہ فرس کے ماس پر ماسکو سے عمود ϵ ہیں۔ فرض کرو کہ طہ وہ زاویہ ہے جو ایک ماسکی نیم قطر ماس کے ساتھ بناتا ہے۔

کیلر کے دوسرے کلیہ سے فوراً یہ مستنبط ہوتا ہے کہ ϵ سیارہ کی خطی رفتار کے بالعکس متناسب ہے اور اس لیے فرس مرتسم کرنے کا وقت ایسے بدلتا ہے جیسے ϵ فرس۔ وہ زاویہ جو غیر مقبوضہ ماسک کے گرد مرتسم ہوتا ہے فرس جب طہ ϵ ہے اور اس لیے اس غیر مقبوضہ ماسک کے گرد زاویائی رفتار

ϵ فرس جب طہ ϵ فرس = جب طہ ϵ = جب طہ ϵ ϵ لیکن قطع ناقص کی خاصیت کی رو سے ϵ مستقل ہوتا ہے اس لیے مسئلہ ثابت ہو گیا

مثال ۹۔ ایک سیارہ سورج کے گرد ایک ناقصی مدار پر حرکت کرتا ہے اور سورج ایک ماسک پر ہے۔ اگر مدار کے خروج المکز کا مربع نظر انداز کیا جاسکے تو ثابت کرو کہ سیارہ کی زاویائی رفتار دوسرے ماسک کے گرد یکساں ہوگی۔

مثال ۱۰۔ تختہ ذیل کی مدد سے جو بجری جسنری باب۱۹ سے اخذ کیا گیا ہے ثابت کرو کہ زمین کے مدار کا خروج المکز تقریباً ۱۹۸۰۰ ہے۔ (۱۵۲)

سورج کا طول بلد

یکم جنوری ۲۸۱ ۵ ۳۰۱۶

۲۸۲ ۶ ۳۹۶۷

یکم جولائی ۹۹ ۳۲ ۱۹۶۱

[Coll. Exam.] ۲۹ ۹۰۰ ۳۹۶۶

مثال ۱۱۔ اگر ایک صغیر سیارہ کے مدار کو طریق الشمس کے مستوی میں ایک دائرہ تسلیم کیا جائے تو ثابت کرو کہ سیارہ اور سورج کے طول بلد کے فرق کے

دو مشاہدات مع گذرے ہوئے وقت کے علم کے نصف قطر متعین کرنے کے لیے کافی ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ ایسے تین مشاہدات مدار کی تعین کریں گے اگر اُسے قلع مکانی مان لیا جائے۔

طول بلد کے فرق کے ایک واحد مشاہدہ سے یہ معلوم ہوگا کہ سیارہ ایک معلوم خط مستقیم پر واقع ہونا چاہئے یعنی اُس خط پر جو زمین کے مرکز میں سے طریق الشمس کے اُس نقطہ تک کھینچا گیا ہو جو سورج سے مشاہدہ کردہ فاصلہ پر واقع ہے۔ جب ایسے دو خطوط مستقیم معلوم ہو جائیں تو ایک دائرہ جس کا مرکز سورج پر ہوا ان میں سے ہر خط کو دو نقطوں میں قطع کرے گا۔ اگر ایک خط مستقیم پر کا ایک نقطہ تقاطع اور دوسرے خط مستقیم پر کا ایک نقطہ تقاطع سورج پر وہ زاویہ بنائیں جس سے اُس نصف قطر کے وقت کا مشاہدہ کردہ وقفہ حاصل ہو جائے تو مسئلہ حل ہو جاتا ہے۔ پس آزمائش سے اس طریقہ پر نصف قطر کی تعین ہوگی۔ نصف قطر کی مساوات بھی معلوم کیجا سکتی ہے لیکن یہ بھی صرف آزمائش سے حل کی جا سکتی ہے۔

مثال ۱۲۔ ثابت کرو کہ ایک مدت اقتراں میں کوئی سفلی سیارہ نصف النہار کو اتنے ہی مرتبہ عبور کرتا ہے جتنی مرتبہ سورج لیکن کوئی علوی سیارہ ایک مرتبہ زائد عبور کرے گا۔

مثال ۱۳۔ مشتری کے چوتھے قمر کا مداری دور

$$\text{دن } 16 \text{ گھنٹے } 18 \text{ منٹ } 5 \text{ ثانیے} = 16 \times 60 \times 60 + 18 \times 60 + 5 = 53552 \text{ ثانیے}$$

ہے اور پانچویں قمر کا دور ۱۱ گھنٹے ۵۷ منٹ ۲۷ ثانیے = ۴۱۹۸۲۳۶ ثانیے۔ دن کپلر کے تیسرے کلیئہ کی مدد سے مشتری سے ان دو قمروں کے اوسط فاصلوں کی نسبت معلوم کرو۔

مثال ۱۴۔ یہ مان کر کے مریخ کے قمر دیوموس (Deimos) اور فوبوس (Phobos) کی مداریوں میں گردش کرتے ہیں اور یہ کہ ۲۳ ستمبر ۱۹۰۹ء کے تقابل (Opposition) پر مریخ کے مرکز سے دیوموس کا بڑے سے بڑا مشاہدہ کردہ فاصلہ ۲۳۱۱ تھا کپلر کے تیسرے کلیئہ سے ثابت کرو کہ فوبوس کا بڑے سے بڑا ظاہری

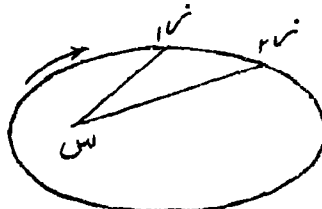
فاصلہ ۳۳۲۲ ہے جبکہ یہ دیا گیا ہو کہ فوٹوس کی مدت دوران ۷ گھنٹے ۲۹ منٹ ۱۳۲۸۵ ثانیے ہے اور دیوس کی ۳۰ گھنٹے ۱۷ منٹ ۵۴ ثانیے۔

۵۱۔ سورج کی ظاہری حرکت۔

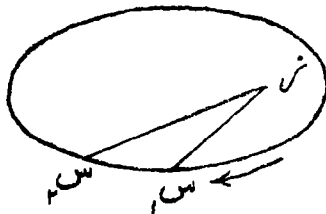
سورج کے گرد زمین کی گردش سے سورج کے ظاہری مقام اور اس کی ظاہری جسامت دونوں میں تبدیلیاں ہوتی ہیں جبکہ سورج کو زمین سے دیکھا جاتا ہے۔ اب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ وہ منظر جس سے ہمیں اس باب میں واسطہ ہے بالکل ٹھیک ٹھیک پیدا کیا جاسکتا ہے اگر زمین فی الواقع ساکن ہوتی اور سورج زمین کے گرد ایک ایسے مدار پر حرکت کرتا جو کیلبر کے کلیوں کے مطابق ہوتا اور شکل اور ناپ میں سورج کے گرد زمین کے مدار کے مماثل ہوتا۔ فرض کرو کہ مس (شکل ۵۳) سورج ہے اور نر اور نم زمین کے دو محل ہیں۔ نر سے سورج سمت نم میں نظر آتا ہے اور اس کا فاصلہ نر میں ہے۔

شکل ۵۴ میں نر سے نم ، نر میں کے متوازی اور ساوی کھینچو۔ اسی طرح فرض کرو کہ نم ، نر میں کے مساوی اور متوازی ہے اگر ایسے نقطوں نم ، نر ، وغیرہ کے دوسرے زوجوں کے لیے دہرایا جائے تو وہ قطع ناقص جو مس ، نم ، سے مرسم ہوگا شکل اور ناپ میں بالکل اس قطع ناقص کے مماثل ہوگا جو نر ، نم ، وغیرہ سے مرسم ہوتا ہے۔ ثانی الذکر قطع ناقص سورج کے گرد زمین کا حقیقی راستہ ہے اور اول الذکر وہ راستہ ہے جسے سورج زمین کے گرد مرسم کرتا نظر آتا ہے۔ پھر آن سورج کی ظاہری سمت اور اس کا فاصلہ وہی ہوتے ہیں خواہ ہم یہ سمجھیں کہ زمین ثابت سورج کے گرد گھوم رہی ہے (شکل ۵۳) یا یہ سمجھیں کہ سورج ثابت زمین کے گرد گھوم رہا ہے (شکل ۵۴)۔

اگر سورج کا نصف قطر ا ہو اور زمین سے سورج کے مرکز کا فاصلہ ر ہو (یہاں ر سورج کے مرکز کو ایک نقطہ تصور کرینگے) تو سورج کے



شکل (۵۳)



شکل (۵۴)

ظاہری نیم قطر کی زاویہ
قیمت جبکہ زمین سے دیکھا
جائے جب ۱۸۰ ہے۔

یہ زاویہ چونکہ جھوٹا ہے
اس لیے ہم اس کی قیمت
قوس کے ثانیوں میں کافی
تقرب کے طور پر
۱ = ۱۸۰ جب آئے سکتے
ہیں۔ اس طرح ہم دیکھتے
ہیں کہ ۱ کے بالعکس
بدلتا ہے اس لیے اگر سال

کی دو مختلف تاریخوں پر ۱ کو مشاہدہ سے معلوم کیا جائے تو سورج کے
اضافی فاصلے ان تاریخوں پر فوراً حاصل ہوتے ہیں۔

مثال۔ بتاریخ ۳ جنوری ۱۹۰۱ء سورج کا زاویہ نیم قطر ۱۶، ۵۸، ۱۷
ہے اس وقت سورج زمین سے کم سے کم فاصلہ پر ہے۔ بتاریخ ۲ جولائی ۱۹۰۱ء
سورج کا زاویہ نیم قطر ۱۵، ۵۱، ۳۷ ہے اس وقت سورج زمین سے زیادہ سے
زیادہ فاصلہ پر ہے۔ ان مفروضات سے ثابت کرو کہ زمین کے مدار کا خروج المرکز
۰۰۰۱۶۷ ہے۔

۵۲۔ ناقصی حرکت محسوب کرنا۔

(۱۵۴)

فرض کرو کہ ف زمین کا مرکز ہے اور و پ و قطع ناقص ہے
جس کا ماسکہ ف ہے اور جس میں سورج اپنی سالانہ گردش کی تکمیل کرتا ہو
نظر آتا ہے۔ اس ناقص کا محور اعظم و و ہے اور اس کا مرکز ج ہے۔
اور اس کا نصف قطر ج و = ۱/۲ و و = ۱۔ خطی پ پ و و پر

سورج ۹ سے پ تک حرکت کرتا ہے اور اگر مدار کی مدت دوران ت ہو تو

ت : ت :: رقبہ و ف پ : ناقص کا رقبہ
اگر ہم ن سے اوسط حرکت کو تعبیر کریں یعنی اگر ن اُس زاویہ کی اوسط قیمت کا
دائری ناپ ہو جو کالی وقت میں سمتی نیم قطر سے عبور ہوتا ہے تو $n = 2\pi$ (۱۵۵)
اور چونکہ ناقص کا رقبہ π ا ب ہے اس لیے

$$ن ت = ۲ \times \text{رقبہ و ف پ} \quad \text{ا ب}$$

زاویہ ن ت بہت اہمیت رکھتا ہے اسے ہم اوسط بے قاعدگی
(Mean anomaly) کہیں گے اور اس کو ط سے تعبیر کریں گے۔

قطع ناقص کے خواص سے پ ہا ق ہ = ب ا اس لیے
رقبہ و ہ پ

$$= ب \times \text{و ہ ق ا} = ب (و ج ق - ہ ج ق) \quad \text{ا}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{ا ب} (ع - جب ع جم ع)$$

نیز رقبہ ف ہ پ

$$= ب \times ق ہ \times ف ہ ا = \frac{۱}{۲} \text{ا ب} (جب ع جم ع - ز جب ع)$$

اس لیے و ف پ = و ہ پ + ف ہ پ = $\frac{۱}{۲} \text{ا ب} (ع - ز جب ع)$

اور آخر الام ط = ع - ز جب ع (۱)

پس ط ع کی رقوم میں بیان ہو چکا اور اب ہم و کو ع کی رقوم میں

اس طرح بیان کر سکتے ہیں :-

قطع ناقص سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{رجم و} = \text{ا جم ع} - \text{ا ز}$$

$$\text{رجب و} = \text{پ جب ع}$$

اس لیے مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$ر = \frac{۱}{۲} (ا - ز جب ع) \quad \text{..... (۲)}$$

$$۲ \text{ رجب ا} \frac{۱}{۲} و = ر (ا - جم و) = \frac{۱}{۲} (ا - ز جب ع - جم ع + ز)$$

$$\begin{aligned} 1 &= (1+z)(1-z) \\ 2 &= (1+z)(1-z) + (1-z)(1-z) + (1-z)(1-z) \\ &= (1+z)(1-z) + (1-z)(1-z) \end{aligned}$$

اور بالآخر

$$\text{مس } \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}} \text{ مس } \frac{1}{2} \dots \dots \dots (3)$$

* [لکرائج کے مسئلہ کا اطلاق - اگر ہم (۱) اور (۳) سے

ء کو سا قظ کر سکیں تو ط اور و کے درمیان ایک رشتہ
ملجاتا ہے لیکن یہ مساواتیں ماورائی نوعیت کی ہیں اور اس لیے
محدود رقموں میں ایسا اسقاط نامکن ہے۔ تاہم لکرائج کے مسئلہ کی
مدد سے ہم و کو ط کی رقوم میں ز کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ کے ذریعہ
بیان کر سکتے ہیں۔ اس سلسلہ سے ط اور ز کی دی ہوئی قیمتوں کے لیے
ہم و کو کسی مطلوبہ درجہ صحت تک محسوب کر سکیں گے۔
لکرائج کا مسئلہ یہ ہے :- اگر یہ دیا گیا ہو کہ

$$y = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \dots \dots \dots (1)$$

جس میں لا اور ما تبوع متغیر ہیں اور اگر فا (ی) کا کوئی تفاعل ہو تو

(۱۵۶)

$$\text{فا (ی)} = \text{فا (لا)} + \text{ما فہ (لا) فا (لا)} + \frac{\text{ما}^2}{2 \times 1} \text{ فہ (لا) فا (لا)} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{\text{ما}^n}{n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1} \text{ فہ (لا) فا (لا)} + \dots + \dots$$

جس میں فا (لا) حسب معمول $\frac{\text{فا (لا)}}{\text{فہ (لا)}}$ کو تعبیر کرتا ہے۔

اس کا اطلاق زیر بحث صورت پر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم
ی کی بجائے ء، لا کی بجائے ط، ما کی بجائے ز لکھیں اور اگر فہ (ع) = جب ء

رکھیں تو مساوات (۱) مساوات (۱) کے مماثل ہو جاتی ہے۔ علاوہ انہیں اگر ہم (۳) کو شکل و = فا (۶) میں لکھیں تو مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$و = فا (۶) = فا (ط) + ز جب ط فا (ط) + \frac{ز^۲}{۱۱} فرط \{ جب ط فا (ط) \}$$

$$+ \frac{ز^۳}{۱۲} فرط \{ جب ط فا (ط) \} + \dots (ب)$$

لیکن مساوات (۳) سے اس شہور مثلثی پھیلاؤ کے ذریعہ جو صفحہ ۲۲۵ میں ثابت کیا گیا ہے ماہل ہوتا ہے

$$و = فا (۶) = ۲ + ۶ \{ ج جب ۶ + \frac{۱}{۲} ج جب ۲ + \frac{۱}{۳} ج جب ۳ + \dots \}$$

$$جہاں ج = ۱ - \sqrt{۱ - ز} \text{ اس لیے}$$

$$فا (ط) = ط + ۲ \{ ج جب ط + \frac{۱}{۲} ج جب ۲ + \frac{۱}{۳} ج جب ۳ + \dots \}$$

اور اس لیے

فا (ط) = ۲ x ۱ { ج جب ط + ج جب ۲ + ج جب ۳ + ... }
پس مساوات (ب) کی بائیں جانب کی سب نہیں محسوب کی جاسکتی ہیں اور اس طرح و صحت کے کسی مطلوبہ درجہ تک حاصل کیا جاسکتا ہے۔
دیکھو ضابطہ (۷) صفحہ ۲۲۷ [

کیلر کا مسئلہ - مساوات (۱) کے حل کرنے کو یعنی ع کے

متعین کرنے کو جبکہ ط دیا گیا ہو کیلر کا مسئلہ کہتے ہیں۔ فرض کرو کہ ع کی ایک تقریبی قیمت ع ہے جو تخمین سے یا کسی اور ذریعہ سے حاصل ہوئی ہے اور فرض کرو کہ

ع - ز جب ع = ط
اگر ع کی اصلی قیمت ع + مف ع ہو تو (۱) میں اندراج کرنے سے

تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{مف ب} = \frac{ط - ط}{1 - زجم} \quad (۴)$$

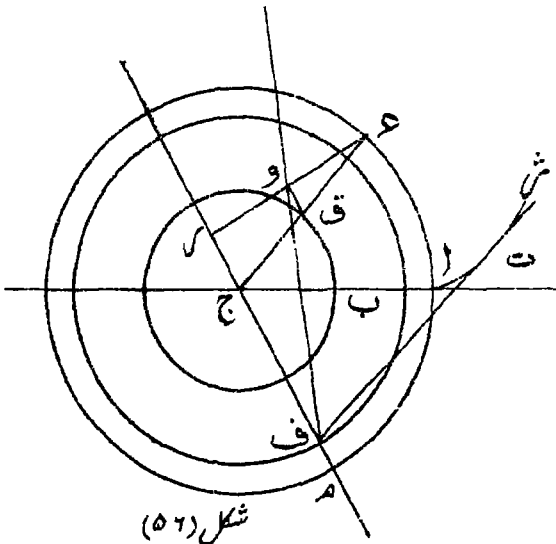
کاگنولی نے یہ ثابت کیا ہے کہ تقرب کے اس طریقہ میں زیادہ صحت حاصل کی جاسکتی ہے اگر ضابطہ (۴) کی بجائے ضابطہ

$$\text{مف ب} = \frac{ط - ط}{1 - زجم + ۰.۶ \{ ۱ - (ط - ط) \}} \quad (۵۶)$$

استعمال کیا جائے۔

جیسا کہ آدیس (Adams) نے بیان کیا ہے یہ دونوں طریقے دراصل نیوٹن کے مجوزہ ہیں۔

کپلر کے مسئلہ کو تریسیمی طریقوں کی مدد سے حل کرنے کے لیے متعدد عمل استعمال کئے جاتے ہیں۔ ان میں سے ایک تریسیمی حل یہاں درج کیا جاتا ہے جس کے لیے میں ڈاکٹر رامبو (Dr. Rambaut) کا ممنون ہوں۔



تین ہم مرکز دائرے
(شکل ۵۶) لکھنیو جگہ
نصف قطر علی الترتیب
ج ب = ب
ج ق = ق زاوہ
ج د = د ہوں۔
ان دائروں کو
علی الترتیب صغیر
دائرہ، ماسکی دائرہ،
اور کبیرہ دائرہ کے

نام سے موسوم کیا جائے گا۔ کبیر دائرہ کے کسی نقطہ Δ سے ابتدا کر کے اس کا درجہ Δ تشریحیچہ - فرض کرو کہ ج Δ وہ سمت ہے جہاں سے اوسط بے قاعدگی ط (زاویہ Δ ج) ماسکی پیمائش کی جاتی ہے۔ اب ط کے جواب میں ر، ϵ ، و کی قیمتیں معلوم کی جاسکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ج ماسکی دائرہ کو ف پر قطع کرتا ہے۔ ف پر درجہ کا عماد کبیر دائرہ کا ماس ہے۔ فرض کرو کہ اس کا نقطہ ماس ϵ ہے تو ج ϵ جو صغیر دائرہ کو ق پر قطع کرتا ہے ف ت کے متوازی ہے۔ درجہ کی لازمی خاصیت کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قوس Δ ϵ = ϵ ت (۱۵۸) لیکن

ϵ ت = ج ف جب ف ج ϵ = از جب ف ج ϵ
ایسے شکل
جو سادہ شکل

$$\epsilon = \tau - ز جب \epsilon$$

اختیار کرتا ہے اگر ہم زاویہ ف ج ϵ = ϵ رکھیں۔
اگر ϵ سے ج ف پر عمود ϵ ماس اور ق سے ϵ ماس پر عمود
ق و کھینچے جائیں تو

ف و جم م ف و = ج و جم ϵ - ج ف = (جم ϵ - از)
ف و جب م ف و = ج ق جب ϵ = ب جم ϵ
پس جب مذکورہ بالا تین دائرے اور درجہ Δ تشریحیچہ لے
جائیں تو کپلر کے مسئلہ کے حل کو اختصاراً اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے :-
کبیر دائرہ پر ایک نقطہ ماس ایسا لو کہ زاویہ Δ ج م = ط - نقطہ
سے جو ج م اور ماسکی دائرہ کا نقطہ تقاطع ہے درجہ کا ماس ف ت
کھینچو اور ج میں سے ج ق ϵ ف ت کے متوازی کھینچو جو کبیر اور صغیر
دائرہ کو علی الترتیب ϵ اور ق پر قطع کرے۔
تب زاویہ Δ ج م = ط، زاویہ م ف و = و

زاویہ مرجع = ۶۰° ف = ۱۰۰°

اور مسئلہ حل ہو جاتا ہے۔

[باؤشینگر (Bauschinger) کی جدولیں اور اسی قسم کی دوسری جدولیں معلوم کرنے کے سوال کو حل کرنے میں بڑی مدد دیتی ہیں جبکہ ط اور زدے گئے ہوں۔ ہم ان کے استعمال کی توضیح حسب ذیل سوال سے کرتے ہیں۔

ہیلی کے دمدار تارے (Comet) کے مدار کے لئے حسب ذیل مفروضہ عناصر دے گئے ہیں :-

خروج المرکز ز = ۳۳° ۱۹۶۱

حفیض سے گزرنے کا وقت = ۲۴ مئی ۱۹۱۰ء

دور = ۶۶۰.۸۵ سال

اس تارے کی خروج المرکز اور اصلی بے قاعد گیاں بتایں ۲۴ مئی ۱۹۱۰ء معلوم کرو۔

اوسط حرکت = ۳۶۰° ۱۹ اور چونکہ حفیض پر پہنچنے کے لیے ابھی دس سال باقی ہیں اس لیے

$$ط = \frac{۶۰ \times ۶۰ \times ۳۶۰ \times ۱۰}{۶۶۰.۸۵} = ۱۷۰.۳۳۵۵۸$$

$$۵۵۱۸۱۸^{\circ} ۴۰' =$$

دوہرے داخلہ کی باؤشینگر کی جدولیں دلیلوں ط = ۴۷۳° اور ز = ۰.۱۹۶ کے لیے دیکھنے سے خروج المرکز پے قاعدگی کی تقریری قیمت ۱۰۱۳ = ۶

حاصل ہوتی ہے۔

(۱۵۹)

علم ہشت کروڑی حصہ اول ۲۴۳۳ کیا اور نیوٹن کے کٹے اور ان کا استعمال

پھر ضابطہ (۴) سے ہم مف و کو حسب طریقہ ذیل محسوب کرتے ہیں:-

$$\begin{aligned}
 \text{ل جب } 6 &= 959914984 & \text{ل جم } 6 &= 9529214 \text{ (ن)} \\
 \text{ل ز} &= 95983054 & \text{ل ز} &= 9598305 \\
 \text{لوک قم آ} &= 53144251 & \text{ل ز جم } 6 &= 9524519 \text{ (ن)} \\
 \text{لوک ز جب } 6 &= 52889482 & \text{ل ز جم } 6 &= 151884 \\
 \text{ز جب } 6 &= 19452412 & \text{لوک (ط-ط)} &= 2124004 \\
 & & \text{لوک (1-ز جم } 6) &= 604494 \\
 & & \text{لوک مف } 6 &= 2118511 \\
 & & \text{مف } 6 &= 15315 \\
 & & &= 331520 \\
 & & &= 10018901 \\
 & & &= 331520901 \\
 \end{aligned}$$

یہ قیمت و کی اصلی قیمت سے بہت زیادہ قریب ہونی چاہئے۔
اس کی تصدیق کے لیے ہم دوسرے تقرب کا عمل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \text{ل جب } 6 &= 959914438 \\
 \text{ل ز} &= 95983054 \\
 \text{لوک قم آ} &= 53144251 \\
 \text{لوک ز جب } 6 &= 52889136 \\
 \text{ز جب } 6 &= 194494531 \\
 &= 34531154 \\
 &= 331520901 \\
 &= 55584184 \\
 &= 55584184
 \end{aligned}$$

$$ط - ط = ۰.۴۰۰$$

یہ خفیف فرق بالکل قابل نظر انداز ہے لیکن اگر اس کا لحاظ کیا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ ۱۔ زجم ۶ اور ۱۔ زجم ۶ میں جسے محسوب کیا جا چکا ہے قابل قدر فرق نہیں ہوگا اور ہمیں حاصل ہوگا

$$مف ۶ = \frac{ط - ط}{۱ - زجم ۶} = \frac{ط - ط}{۱ - زجم ۶} = \frac{۰.۴ - ۰.۳}{۱۲} = ۰.۰۳$$

اور اس لیے بالآخر $۰.۱۰۱ = ۰.۱۲۳۳۱۲۳۳$ معلوم کر لینے کے خروج المرکزی بے قاعدگی ۶ = $۰.۱۰۱ = ۰.۱۲۳۳۱۲۳۳$ معلوم کر لینے کے بعد ہم اسے مساوات (۳) میں و معلوم کرنے کے لیے درج کرتے ہیں۔ اس مقصد کے لیے مساوات (۳) کو شکل

$$مس \frac{۱}{۴} = مس \left(\frac{۱}{۴} + \pi \frac{۱}{۴} \right) (ف) مس \frac{۱}{۴} ۶$$

میں لکھ لینا سہولت کا باعث ہے جہاں جب $ف = ز$ ۔ اگرچہ باؤشنگنر کی جدولیں مطلوبہ قیمت کو ایک اچھے تقریب تک فوراً حاصل کر لینے کے لیے مفید ہیں تاہم وہ ناگزیر نہیں ہیں۔ ترسیمی طریقوں میں سے کسی ایک سے ۶ کی قطبین اس کی اصلی قیمت سے تین یا چار درجوں کے اندر فوراً ہو جائے گی۔ پھر ہم چار مقامی لوکارتموں کی مدد سے ایک قیمت اتنی صحت کے ساتھ حاصل کر سکتے ہیں جتنی جدولوں سے حاصل کرنا ممکن ہے۔ مثلاً اگر ہم نے ترسیمی عمل سے $۶ = ۰.۵$ حاصل کیا ہے تو اسکے بعد طریقہ ذیل انجام پاسکتا ہے:-

$$ل جب ۶ = ۰.۵۱۳۰۹۳ (ن)$$

$$ل ز = ۰.۹۸۳۱$$

$$ل زجم ۶ = ۰.۹۳۹۶۱ (ن)$$

$$۱ - زجم ۶ = ۰.۰۶۰۳۹$$

$$ل جب ۶ = ۰.۹۸۸۴۹$$

$$لوک ز قم ۱ = ۰.۵۲۹۷۵$$

$$لوک ز جب ۶ = ۰.۵۶۲۸۲۴$$

$$ز جب ۶ = ۰.۱۹۱۶۰۰$$

$$۱۳۳۳۵۳ =$$

لوک (ط-ط) = ۰.۶۴۹۳ (ن)	$\frac{۰.۶۴۹۳}{۱.۰۵} = ۰.۶۱۸۴$
لوک (۱-زجم ع) = ۰.۶۹۶۶	$\frac{۰.۶۹۶۶}{۱.۰۵} = ۰.۶۶۳۴$
لوک منف ع = ۰.۵۵۲۴ (ن)	$\frac{۰.۵۵۲۴}{۱.۰۵} = ۰.۵۲۶۱$
منف ع = ۰.۳۵۶	$\frac{۰.۳۵۶}{۱.۰۵} = ۰.۳۳۹۰$
$\frac{۰.۳۳۹۰}{۱.۰۵} = ۰.۳۲۲۹$	$\frac{۰.۳۲۲۹}{۱.۰۵} = ۰.۳۰۷۵$
$\frac{۰.۳۰۷۵}{۱.۰۵} = ۰.۲۹۲۹$	$\frac{۰.۲۹۲۹}{۱.۰۵} = ۰.۲۷۹۰$

اکثر صورتوں میں جو مسئلے پیش ہوتے ہیں ان میں اخروج المرکز بہت چھوٹا ہوتا ہے، مثلاً سورج کے گرد زمین کی حرکت میں خروج المرکز ۱۱.۵۹۱۷ سے زیادہ نہیں ہوتا۔ ایسی صورتوں میں سب سے بہتر یہ ہے کہ سورج کی اصلی بے قاعدگی کے لیے ط کی رقوم میں ایک تقریبی جملہ ایک سلسلہ کی شکل میں حاصل کیا جائے، اس سلسلہ کو اکثر مقاصد کے لئے ۳ سے آگے بجانے کی ضرورت نہیں ہوگی۔

ز کی بجائے جب فہ لکھنے سے وفد ۵۲ مساوات (۳) سے حاصل ہوتا ہے

مس $\frac{۱}{۴}$ و = مس $\frac{۱}{۴}$ ع (۱+ مس $\frac{۱}{۴}$ فہ) \ (۱- مس $\frac{۱}{۴}$ فہ)

اس لیے اگر نیپیری لوکارتموں کی اساس ہو تو

$$\left(\frac{۲۱}{۱۰} - \frac{۲۱}{۱۰} \right) \left(\frac{۲۱}{۱۰} + \frac{۲۱}{۱۰} \right)$$

$$= (۱+ مس \frac{۱}{۴} فہ) (۱- مس \frac{۱}{۴} فہ) \left(\frac{۲۱}{۱۰} - \frac{۲۱}{۱۰} \right) \left(\frac{۲۱}{۱۰} + \frac{۲۱}{۱۰} \right)$$

یا $\frac{۲۱}{۱۰} = \frac{۲۱}{۱۰} (۱- مس \frac{۱}{۴} فہ) (۱+ مس \frac{۱}{۴} فہ)$

اور طر فین کے لوکارتم لینے سے

$$۰ = ۲ + ۶ (مس \frac{۱}{۴} فہ جب ۶ + مس \frac{۱}{۴} فہ جب ۶۲ + ۰۰۰)$$

اس ضابطہ کو خروج المرکز ز کی رقوم میں بیان کرنے کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس } \frac{1}{p} \text{ نہ } = (1 - \sqrt{1 - z^2}) = z = \frac{1}{p} z + \frac{1}{p} z^2 + \frac{1}{p} z^3 + \dots$$

اور اندراج سے

$$6 = (z + \frac{1}{p} z^2) \text{ جب } 6 + \frac{1}{p} z^2 \text{ جب } 6 + \frac{1}{p} z^2 \text{ جب } 6 \dots (5)$$

اب اس ضابطہ اور

$$p = 6 - z \text{ جب } 6$$

سے عکس قاطع کرنا باقی ہے۔

پہلے تقرب کے طور پر کہو

$$p = 6 + z \text{ جب } 6$$

اگر z^2 کے آگے کی رقمیں نظر انداز کی جائیں تو

$$p = 6 + z \text{ جب } (6 + z \text{ جب } 6)$$

$$p = 6 + z \text{ جب } 6 + \frac{1}{p} z^2 \text{ جب } 6$$

اور اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } 6 = (1 - \frac{1}{p} z^2) \text{ جب } 6 + \frac{1}{p} z^2 \text{ جب } 6 + \frac{3}{p} z^3 \text{ جب } 6$$

ایسے مساوات

$$p = 6 + z \text{ جب } 6$$

میں درج کرنے سے

$$p = 6 + (z - \frac{1}{p} z^2) \text{ جب } 6 + \frac{1}{p} z^2 \text{ جب } 6 + \frac{3}{p} z^3 \text{ جب } 6$$

(۶) - - - - -

نیز z کی پہلی قوت تک

$$\text{جب } 6 = 6 + z \text{ جب } 6 + z \text{ جب } 6 - z \text{ جب } 6$$

ان قیمتوں کو مساوات (۴) میں داخل کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$و = ط + (۲ - ز) \frac{۱}{۴} ز \quad \text{جب } ط + \frac{۵}{۴} ز \quad \text{جب } ۲ ط + \frac{۱۳}{۱۲} ز \quad \text{جب } ۳ ط$$

(۷)

یہ مساوات علم ہیئت میں ایک اساسی مساوات ہے۔ اس سے کسی سیارہ کی اصلی بے قاعدگی اس کی اوسط بے قاعدگی کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے۔ یہاں اسے خروج المرکز کی تیسری قوت تک محسوب کیا گیا ہے لیکن موجودہ مقاصد کے لیے تیسری قوت بالعموم بہت چھوٹی ہوتی ہے اور اس لیے ناقابل توجہ اس ضابطہ

$$و = ط + ۲ ز \quad \text{جب } ط + \frac{۵}{۴} ز \quad \text{جب } ۲ ط$$

کو یہاں کافی صحیح ضابطہ سمجھا جائے گا۔
اصلی بے قاعدگی اور اوسط بے قاعدگی کے فرق یعنی و۔ ط کو مرکز کی مساوات کہتے ہیں اور اسے

$$۲ ز \quad \text{جب } ط + \frac{۵}{۴} ز \quad \text{جب } ۲ ط$$

سے تعبیر کرتے ہیں۔

اوسط بے قاعدگی کو اصلی بے قاعدگی کی رقوم

میں بیان کرنا۔ وہ صغیر قیہ جو سمتی نیم قطر سے عبور ہوتا ہے جبکہ سیارہ کی اصلی بے قاعدگی بقدر فرو کے بڑھتی ہے $\frac{۱}{۴}$ ر فرو ہے۔ اگر اس قیہ کو متسم کرنے میں وقت فرت صرف ہو اور اگر سیارہ کی مدت دوران ت ہو تو پیکلر کے دوسرے کلیہ سے

$$\frac{۱}{۴} ر فرو : ۱۱ ب :: فرت : ت$$

(۱۶۲) اگر وقت فرت میں اوسط بے قاعدگی میں اضافہ فرط ہو تو
فرط : ۱۱۲ :: فرت : ت

۲+ جب نہ جم نہ ۳ (-۱) جم ک و فرقہ (مسک ۱/۴ نہ)

$$= ۲+۱ (-۱) جم ک و مسک ۱/۴ نہ$$

۲+ جب نہ جم نہ ۳ (-۱) جم ک و مسک ۱/۴ نہ ک + مس ۱/۴ نہ

$$= ۲+۱ (-۱) جم ک و مسک ۱/۴ نہ (۱+ک جم نہ)$$

تکمل کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$ط = ۲+۱ (-۱) جم ک مسک ۱/۴ نہ (۱+ک جم نہ) جب ک و$$

تکمل کا مستقل صفر ہے کیونکہ ط اور و ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں۔ اس سلسلہ (۱۶۳) کی پہلی چار نہیں ہیں

$$ط = و - ۲ مس ۱/۴ نہ (۱+جم نہ) جب و$$

$$+ مس ۱/۴ نہ (۲+جم نہ) جب ۲ و$$

$$= ۲ مس ۱/۴ نہ (۳+جم نہ) جب ۳ و$$

اگر ز کی تین سے اعلیٰ ترقوتیں نظر نماز کی جاسکیں تو

$$نہ = ز + ۱/۴ نہ جم نہ = ۱ - ۱/۴ نہ اور مس ۱/۴ نہ = ۱/۴ نہ + ز + ۱/۴ نہ$$

اور اس لیے حسب سابق مائل ہوتا ہے

$$ط = و - ۲ ز جب و + ۳ ز جب ۲ و - ۱/۴ نہ ز جب ۳ و$$

مثال ۱۔ یہ دیا گیا ہے کہ

$$ط = و - ۲ ز جب و + ۳ ز جب ۲ و - ۱/۴ نہ ز جب ۳ و$$

جہاں زاویہ جھوٹی مقدار ہے جس کی تین سے اعلیٰ تر سب قوتیں نظر انداز کی گئی ہیں
سلسلہ کو الٹا کر ثابت کرو کہ

$$و = ط + (ز - \frac{1}{4} ز) جب ط + \frac{5}{4} ز جب ط + \frac{13}{12} ز جب ط$$

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ کسی سیارہ کی حرکت کی سمت اور اس کے
سمتی نیم قطر کے درمیان زاویہ کا تماس $\sqrt{1 - ز}$ ز جب ۶ ہے۔

مثال ۳۔ اگر خروج المرکز جب نہ اکائی کے بہت ہی قریب
ہو تو ثابت کرو کہ اوسط بے قاعدگی ط، اصلی بے قاعدگی و کی رقوم میں حسب
ذیل ضابطہ کے ذریعہ بیان ہو سکتی ہے

$$ط = \frac{2 \text{ جم } 2}{(1 + \text{جب } 2)} \left(1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \text{ جب } 2 - \frac{1}{3} \text{ جب } 2 \right) \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right)$$

جہاں لا = مس $\frac{1}{4}$ و۔

مثال ۴۔ مساوات ط = ۶۔ ز جب ۶ سے و کو حل کرنے کا
حسب ذیل تریسی طریقہ ثابت کرو جو جے۔ سی۔ آڈسٹن نے دیا ہے :-

جیوب کا منحنی ما = جب لا کھینچو۔ مبدأ و سے محور لا پر و = ط ناپو۔
و میں سے ایک خط کھینچو جو محور لا سے زاویہ مم' ز بنائے اور فرض کرو کہ یہ خط
منحنی کو نقطہ پ پر قطع کرتا ہے۔ تب پ کا فاصلہ ۶ ہے۔

مثال ۵۔ مساوات ط = ۶۔ ز جب ۶ کے حل کے لیے لیویریئر
(Leverrier) کا قاعدہ ثابت کرو اگر ز کی تین سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز

کی جاسکتی ہوں

$$و = ط + \frac{1}{1 - \text{جم } ط} - \frac{1}{2} \left(\frac{\text{جم } ط}{1 - \text{جم } ط} \right)$$

مثال ۶۔ اگر ایک سیارہ کا طول بلد طہ ہو جو خالی ماسکہ کے گرد ایک اوج سے ناپا گیا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{طہ} = \text{ن ت} + \frac{1}{4} \text{ن ز جب ۲ ن ت}$$

اگر ز کی دو سے اعلیٰ ترقوتیں نظر انداز کی جائیں۔

*** مثال ۷۔** اگر ج (طہ) $\frac{1}{4}$ (طہ + ج طہ) کو تعبیر کرے تو ثابت (۱۶۴) کرو کہ مساوات طہ = ۶ - ز جب ۷ کو حسب ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\text{ط} = \text{ج} - (\text{فہ} + ۶) - \text{ج} - (\text{فہ} - ۶) \text{ جہاں ز} = \text{جب فہ}$$

نیز بتاد کہ ج (طہ) کی قیمتوں کی ایک جدول سے کیلر کے مسئلہ کو حل کرنے میں کس طرح آسانی پیدا ہوتی ہے۔

دیکھو مسٹر آلدس (Aldis) کا مضمون مندرجہ متعلق نوٹس آرے۔
ایس جلد ۶۲ صفحہ ۶۳۳ جس میں یہ جدول دی گئی ہے اور اس کے استعمال کی مثالیں درج ہیں۔

۵۳۔ ناقصی حرکت کے وہ ضابطے جو تربیعوں کے ذریعہ بیان کئے گئے ہیں۔

فرض کرو کہ سیارہ کے خفیض کا طول بلد جس مدار کے مستوی میں ایک ثابت سمت سے پیمائش کیا گیا ہے ص ہے اور سیارہ کا طول بلد طہ ہے اور اعلیٰ بے قاعدگی و (طہ - ص) - مقدار سیارہ کو ل سے تعبیر کیا گیا ہے اور مدت دوران د ہے۔

قطع ناقص کے خواص سے سمتی نیم قطر کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (۱)$$

کسی جرم کے لیے جو سورج کے گرد حرکت کرتا ہو حسب دفعہ حاصل ہوتا ہے

$$r \cos \theta = a(1 - e^2) \quad (۲)$$

(۲) کو فرت کے لیے مل کرنے (۱) سے ر کی قیمت درج کرنے اور مکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ت = \frac{ل}{\pi} \cdot \frac{فرط}{\{1 + زجم(ط - ح)\}^2} \dots (۳)$$

جہاں ت وہ وقت ہے جس میں سیارہ حقیض سے اصلی بے قاعدگی و = (ط - ح) تک ایک مدار جس کا خروج المرکز نز اور وتر خاص ل ہے حرکت کرتا ہے۔ مساوات بالا کو متجانس شکل

$$\frac{ت}{د} = \frac{ل}{\pi} \cdot \frac{1}{\{1 + زجم(ط - ح)\}^2} \cdot \frac{1}{فرو}$$

میں بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں د، علی الترتیب زمین کا وسط فاصلہ اور مدت دوران ہیں۔

(۱) کو ت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

$$\frac{فر}{فرت} = \frac{ل}{\{1 + زجم(ط - ح)\}^2} \cdot \frac{فرط}{فرت} = زجب(ط - ح) \cdot \frac{ر}{ل} \cdot \frac{فرط}{فرت}$$

$$= زہامہ جب(ط - ح) \cdot \frac{ل}{ر}$$

$$\text{نیز } \frac{ر}{فرت} = \frac{ل}{\{1 + زجم(ط - ح)\}^2} \cdot \frac{ل}{ر}$$

اواس لیے سیارہ کی رفتار کے مربع کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$\left(\frac{ر}{فرت}\right)^2 + \left(\frac{ر}{فرت}\right)^2 = \frac{ل}{\{1 + زجم(ط - ح)\}^2} \cdot \frac{ل}{ر}$$

$$2 = \frac{ل}{ر} \cdot \frac{ل}{\{1 + زجم(ط - ح)\}^2}$$

اسے متجانس شکل (۱۶۵)

$$\left(\frac{1}{d} - \frac{2}{r} \right) \frac{a^2 \pi^2}{d}$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے جو عمل حساب کے لیے زیادہ مہولت بخش ہے۔

اگر مدار قطع مکانی ہو جیسا کہ وہ مدار ہوتا ہے جس میں دُمدار ستارہ کی بڑی اکثریت گردش کرتی ہے تو اس صورت میں $z = 1$ اور $d = \infty$ ایسے ضابطے (۱) اور (۳) ہو جاتے ہیں

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{1}{p} \text{ لقطہ } - \frac{1}{p} (\text{طہ} - \text{مہ}) \\ t &= \frac{d \text{ لقطہ}}{2\pi} \left\{ \text{مس } \frac{1}{p} (\text{طہ} - \text{مہ}) + \text{مس } \frac{1}{p} (\text{طہ} - \text{مہ}) \right\} \dots (۴) \end{aligned} \right\}$$

پنتیجہ جس پر ہم پہنچے ہیں یوں بیان کیا جاسکتا ہے :- فرض کرو کہ کسی سیارہ (مثلاً زمین) کی مدت دوران اور اوسط فاصلہ علی الترتیب d و a ہیں۔ اگر ایک دُمدار ستارہ کے مکانی مدار کا وتر خاص l ہو تو وہ وقت جس میں یہ دُمدار ستارہ حقیض سے اصلی بے قاعدگی و تک گذرتا ہے حسب ذیل ہے

$$d \text{ لقطہ } \left(\text{مس } \frac{1}{p} + \text{مس } \frac{1}{p} \right) \text{ و } \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} \right) \text{ لقطہ}$$

یولر کا مسئلہ۔ مکانی حرکت کی ایک مشہور خاصیت یولر کے مسئلہ میں بیان ہوئی ہے۔ یولر کے مسئلہ کا دعویٰ حسب ذیل ہے۔ اگر کسی دُمدار ستارے کے مکانی مدار میں دو نقطے ج اور ج لیے جائیں اور سورج سے ان نقطوں تک سمتی نیم قطر r اور r' ہوں اور اگر فاصلہ ج ج' لگیا کہ ہو تو ج سے ج' تک حرکت کرنے میں دُمدار ستارے کو جو وقت

$$\frac{d}{2\pi} \left\{ \left(\frac{r + r' \cos k}{d} \right) - \left(\frac{r + r' \cos k'}{d} \right) \right\}$$

اس کی ایک اہم توسیع اُس عام تر صورت کے لیے جو قطع ناقص میں حرکت سے متعلق ہے لیمبرٹ (Lambert) نے بیان کی ہے جسے حسب ذیل طریقہ پر واضح کیا جاسکتا ہے۔
اگر ایک سیارہ اُس محل سے جہاں سمتی نیم قطر ہے اُس محل تک جہاں سمتی نیم قطر رہے حرکت کرنے میں وقت t لے لے اور اگر ان دو محلوں کا درمیانی وتر k ہو تو

$$۲۲ ت ۵ = (ع - جب ع) - (ع - جب ع)$$

$$جہاں جب \frac{1}{p} = ع \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r}{k}} اور جب \frac{1}{p} = ع \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r-k}{k}}$$

اور سیارہ کی مدت دوران D ہے۔
چونکہ

$$r = (۱ - زجم ع) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r}{k}} = (۱ - زجم ع) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r-k}{k}} + (ع - جب ع) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r-k}{k}}$$

$$۲۲ ت ۵ = ع - ع - ز (جب ع - جب ع)$$

$$ع - ع - ز (جب ع - جب ع) = ع - ع - ز (ع - جب ع) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r-k}{k}}$$

$$اس لیے (۱ + ز) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r-k}{k}} = ۱ - زجم (ع - جب ع) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r-k}{k}}$$

$$ک \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r-k}{k}} = جب \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r-k}{k}} \{ ۱ - زجم \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r-k}{k}} \}$$

$$۲۲ ت ۵ = ع - ع - زجم (ع - جب ع) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r-k}{k}}$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر k اور $اس لیے$ $د$ معلوم ہوں تو $(ر + ک)$ $ک$ اور $ت$ مقداروں $ع - ع$ اور $زجم \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r-k}{k}}$ کے تفاعل ہیں۔

۱۰ ثبوت جو یہاں دیا گیا ہے آڈمس سے منسوب ہے Collected papers, Vol. I, p, 411

اب فرض کرو کہ

$$\begin{aligned} & \text{ع} - \text{ع} = ۶ = ۲ \text{ عہ اور ز جم } \frac{1}{۲} (۶ + ۶) = \text{جم بہ} \\ & \text{تو } (ر + ز) \backslash ۱۲ = ۱ - \text{جم عہ جم بہ ک} \backslash ۱۲ = \text{جب عہ جب بہ} \\ & \text{اس لیے } (ر + ز + ک) \backslash ۱۲ = ۱ - \text{جم (بہ + عہ)} \\ & (ر + ز - ک) \backslash ۱۲ = ۱ - \text{جم (بہ - عہ)} \end{aligned}$$

$$\text{نیز } ۱۲ \text{ ت } ۵ = ۲ \text{ عہ} - ۲ \text{ جب عہ جم بہ}$$

$$= \{ \text{بہ + عہ} - \text{جب (بہ + عہ)} \} - \{ \text{بہ - عہ} - \text{جب (بہ - عہ)} \}$$

اس میں بہ + عہ = عا اور بہ - عہ = عا رکھنے سے لیمبرٹ کا مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔
مثال ۱ - ثابت کرو کہ ایک ناقصی مدار میں جس کا اوسط فاصلہ ۱ ہے
اوسط بے قاعدگی ط حسب ذیل مختلف طریقوں سے بیان کی جاسکتی ہے:-

$$\text{ط} = ۱۲ \text{ ت } ۱ \backslash ۱۲ = ۱۲ \text{ ت } ۱ \backslash ۱۲ (۱ - ز) \text{ ت } ۱ \backslash ۱۲ = ۱۲ \text{ ت } ۱ \backslash ۱۲$$

جہاں سورج سے زمین کا اوسط فاصلہ ۱ ہے اور کوکبی سال کا طول ۱۲ ہے۔
مثال ۲ - اگر اوسط بے قاعدگی ط ہو، اصلی بے قاعدگی و اور
خروج المکرز تو ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{۲} \text{ ط} = (۱ - ز) \left(\frac{۱ - ز}{۱ + ز} \right)^{\frac{1}{۲}} \text{ مس } \frac{1}{۲} - \frac{۱ - ز}{۳} \left(\frac{۱ - ز}{۱ + ز} \right)^{\frac{۳}{۲}} \text{ مس } \frac{1}{۲} \\ & + \frac{۱ - ز}{۵} \left(\frac{۱ - ز}{۱ + ز} \right)^{\frac{۵}{۲}} \end{aligned}$$

اور اس مساوات کو ذیل کی مساوات میں تبدیل کرو:

$$\begin{aligned} & \frac{۱}{۲} \text{ ت } = \frac{1}{۲} \left(\frac{۱ - ز}{۱ + ز} \right)^{\frac{1}{۲}} \text{ مس } \frac{1}{۲} - \frac{۱ - ز}{۳} \left(\frac{۱ - ز}{۱ + ز} \right)^{\frac{۳}{۲}} \text{ مس } \frac{1}{۲} \\ & + \frac{۱ - ز}{۵} \left(\frac{۱ - ز}{۱ + ز} \right)^{\frac{۵}{۲}} \text{ مس } \frac{1}{۲} - \dots \end{aligned}$$

ہمیں معلوم ہے

$$p = e - z \text{ جب } e$$

$$= \left\{ \frac{\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \text{ مس } \frac{1}{p}}{z - \left(\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \text{ مس } \frac{1}{p} \right)} - \frac{\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \text{ مس } \frac{1}{p}}{z + \left(\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \text{ مس } \frac{1}{p} \right)} \right\}^2$$

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \text{ مس } \frac{1}{p} \text{ کی بجائے ل لکھو تو}$$

$$\frac{1}{p} = \text{مس} \frac{1}{p} - z = \frac{1}{p} - z$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + \dots - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + \dots$$

$$= (z-1) - \frac{z^3-1}{3} + \frac{z^5-1}{5} - \dots$$

$$= (z-1) \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \text{ مس } \frac{1}{p} - \frac{z^3-1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \text{ مس } \frac{1}{p} + \dots$$

$$+ \frac{z^5-1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \text{ مس } \frac{1}{p} - \dots$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{p}}}{\frac{1}{p}} (z-1) = \frac{\sqrt{\frac{1}{p}}}{\frac{1}{p}} = n \quad \text{لیکن}$$

$$t \frac{\sqrt{\frac{1}{p}}}{\frac{1}{p}} (z-1) = b$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{p}}}{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p} - \frac{z^3-1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \text{ مس } \frac{1}{p} + \dots \quad \text{ایسے}$$

$$+ \frac{5-1}{5} \frac{z-1}{z+1} \text{ مس } \frac{1}{3} \text{ و } \dots$$

مکانی مدار کے لیے دفعہ ۵۳ کی مساوات (۴) حاصل ہوئی تھی اس کے جواب میں قطع ناقص یا قطع زائد کے لیے مساوات بالا حاصل ہوئی ہے۔ اگر اس میں $z = 1$ رکھا جائے تو ہمیں صرف یہ مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$\text{ہاتھ ت} = \frac{1}{3} \left\{ \text{مس } \frac{1}{3} \text{ و } + \frac{1}{3} \text{ مس } \frac{1}{3} \text{ و} \right\}$$

کیونکہ دو سری رقم کے بعد سب رقموں میں (۱-ز) ایک جزو ضربی کے طور پر شامل مثال ۳۔ ثابت کرو کہ ایک دُمدار ستارہ زمین کے مدار کے اندر جتنا وقت صرف کرتا ہے وہ ایک سال کا $2\pi(1-z)$ حصہ ہے جہاں z دُمدار ستارے کا حقیقی فاصلہ ہے اور فاصلہ کی اکائی زمین کا شمس مرکزی فاصلہ ہے جسے مستقل سمجھا گیا ہے۔ دُمدار ستارے کے مدار کا ایک قطع مکانی ہونا اور اس کا فریق الشمس کے ستوی میں ہونا تسلیم کر لیا گیا ہے۔ چونکہ $z = 2\pi$ اس لیے حقیض سے اصلی بے قاعدگی و تک وقت کے لیے جملہ حاصل ہوتا ہے

$$2\pi \left(\text{مس } \frac{1}{3} \text{ و } + \frac{1}{3} \text{ مس } \frac{1}{3} \text{ و} \right)$$

نیز $r = z \text{ قط } \frac{1}{3} \text{ و}$ اس لیے جم $\frac{1}{3} \text{ و} = z$ سے اس نقطہ کی اصلی بے قاعدگی متعین ہوگی جہاں دُمدار ستارہ زمین کے مدار کو عبور کرتا ہے۔ اس لیے مس $\frac{1}{3} \text{ و}$ کی بجائے اندراج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z} \right) + \sqrt{\frac{z-1}{z}} \right\} \frac{2\pi}{2\pi}$$

جو زمین کے مدار سے حقیض تک وقت ہے اور اس وقفہ کا دُگنا سوال کا جواب ہے اس جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت $2\pi \frac{1}{3}$ ہے جبکہ $z = \frac{1}{3}$

* مثال ۴ - دو سیارے ہم مستوی مداروں میں حرکت کر رہے ہیں۔ ثابت کرو کہ جب یہ سیارے ایک دوسرے سے قریب ترین ہوتے ہیں تو ان کے طول بلدوں طہ اور طہ کو حسب ذیل دو مساواتیں پوری کرنی چاہئیں :-

$$\frac{\sin \lambda + \sin \phi}{\sin \lambda - \sin \phi} = \frac{\sin \lambda' + \sin \phi'}{\sin \lambda' - \sin \phi'}$$

اور $\frac{\sin \lambda}{\sin \phi} = \frac{\sin \lambda'}{\sin \phi'}$ جب (طہ - طہ) + {ر - ر} (رجم - طہ) {ر - ر} (رجم - طہ) =

$$+ \text{جب (طہ - طہ) } \lambda - \lambda' = 0$$

جہاں λ اور λ' وہ لمحات ہیں جن پر یہ سیارے خفیف میں سے گزرتے ہیں۔ پہلی مساوات سے صرف یہ بیان ہوتا ہے کہ سیارے ایک ہی آن پر طول بلد طہ اور طہ رکھتے ہیں۔

دوسری مساوات معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ $\lambda - \lambda' = 2$ ر رجم (طہ - طہ) (۱۶۹) + λ کو اقل ہونا چاہئے اس لیے

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \phi} - \frac{\sin \lambda'}{\sin \phi} = \frac{\sin \lambda + \sin \phi}{\sin \lambda - \sin \phi} + \frac{\sin \lambda'}{\sin \phi'}$$

$$+ \text{ر رجم (طہ - طہ) } \left(\frac{\sin \lambda}{\sin \phi} - \frac{\sin \lambda'}{\sin \phi} \right) = 0$$

$$\text{اسی طرح } \frac{\sin \lambda}{\sin \phi} = \frac{\sin \lambda'}{\sin \phi'} \text{ جب (طہ - طہ) } \frac{\sin \lambda}{\sin \phi} = \frac{\sin \lambda'}{\sin \phi'}$$

مساوات حاصل ہوتی ہے۔

اگر λ اور λ' دونوں چھوٹے ہوں تو طہ اور طہ تقریباً مساوی ہیں اور

دوسری مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$(1-1) \left\{ \frac{\sin \lambda}{\sin \phi} - \frac{\sin \lambda'}{\sin \phi'} \right\} = 0 \text{ جب (طہ - طہ) } \frac{\sin \lambda}{\sin \phi} = \frac{\sin \lambda'}{\sin \phi'}$$

$$= - \text{فرجم (طہ - سم)} + \text{رفرطہ جب (طہ - سم)}$$

$$= \{ - \text{زجب (طہ - سم)} \text{ جم (طہ - سم)} \} \text{ آل}$$

$$+ \text{آل جب (طہ - سم)} \text{ آل}$$

$$= \{ \text{زجب (سم - سم)} \text{ آل} + \text{جب (طہ - سم)} \text{ آل} \} \text{ آل}$$

اس لئے اگر پ ق = پ ق تو حاصل ہونا چاہئے

$$\text{زجب (سم - سم)} \text{ آل} + \text{جب (طہ - سم)} \text{ آل} = \text{زجب (سم - سم)} \text{ آل}$$

$$+ \text{جب (طہ - سم)} \text{ آل}$$

اگر طہ = طہ = سم تو سیارہ تقابل میں ہے اور

$$\text{زجب (سم - طہ)} \text{ آل} = \text{زجب (سم - طہ)} \text{ آل}$$

پس طہ کی دو قیمتیں ہیں جن میں ۱۸۰ کا فرق ہے۔ یہ سوال کا پہلا حصہ ہے۔ (۱۰۰)

نیز اگر سم = سم اور ز آل = ز آل تو ہر تقابل پر یہ شرط پوری ہوتی ہے۔

مثال ۶۔ قطع مکانی کی قوس مرتسم کرنے میں جو وقت لگتا ہے اس کے

لیے یوکر کا مسئلہ لیمبرٹ کے مسئلہ سے کس طرح افاد کیا جاسکتا ہے۔

اس صورت میں بہ اور عہ لا انتہا چھوٹے ہو جائیں گے۔

مثال ۷۔ سورج راس الحمل میں سے بتاریخ ۲۰ مارچ ۱۹۹۸ء بوقت

۲ گھنٹے ۵ منٹ گذرا تھا اور راس المیزان میں سے بتاریخ ۲۲ ستمبر ۱۹۹۸ء بوقت

۱۲ گھنٹے ۳۵ منٹ گذرا تھا۔ ثابت کرو کہ یہ وقفہ ان میتجوں کے مطابق ہے کہ

زمین کے مدار کا خروج المکرز تقریباً $\frac{1}{4}$ ہے اور خط اویمین خط اعتدالین پر تقریباً

[coll. Exam.]

علی القوائم ہے۔

اگر سورج ایک اعتدالی نقطہ پر ہو اور اگر ز قابل نظر انداز ہو تو آسانی

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$\text{جب (سم + سم)} = \text{زجب سم}$$

پس ع کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی زجب سم - سم اور ۱۱ - سم - زجب سم۔

آٹھواں باب استقبال اور کبہ

(۱۷۱)

صفحہ	دفعہ
۲۶۳	۵۴ — قمر شمسی استقبال کا مشاہدہ
۲۶۶	۵۵ — قمر شمسی استقبال اور کبہ کی طبیعی توضیح
۲۷۰	۵۶ — سیاروی استقبال
۲۷۳	۵۷ — صعود مستقیم اور میل کی رقوم میں استقبال اور کبہ کیلئے عام ضابطے
۲۸۵	۵۸ — راس الحمل کی حرکت طریق الشمس پر
۲۸۹	۵۹ — غیر تابع یومی اعداد
۳۰۰	۶۰ — ستاروں کی ذاتی حرکتیں
۳۰۲	۶۱ — ارضی عرض بلدوں میں تغیرات

۵۴ — قمر شمسی استقبال کا مشاہدہ — وہ اہم منظر جسے ہم

اغذالین کے استقبال کے طور پر جانتے ہیں بہت آسانی سے واضح ہو جاتا ہے اگر ایک آن پر کسی ثابت ستارہ کے مشاہدہ کردہ صعود مستقیم اور میل کا مقابلہ ایک دوسری آن پر جداول الذکر آن سے کافی فصل رکھتی ہو اسی ستارہ کے مشاہدہ کردہ صعود مستقیم اور میل کے ساتھ کیا جائے۔ مثلاً قطب تارے کے محدود حسب تفصیل ذیل معلوم ہوئے تھے :-

۱۸۵۰ء { ص - م (معود مستقیم) ۱ گھنٹہ ۵ منٹ ۲۳ ثانیے
قطب تارہ کیم جنوری }
ضہ (میل) ۸۸۰ ۳۰ ۲۹
ان کا مقابلہ اسی ستارے کے ان محدودوں سے کرنا ہے جو ۵۰ سال
بعد مائل ہوئے تھے :-

۱۸۹۰ء { ص - م ۱ گھنٹہ ۳۳ منٹ ۵۳ ثانیے
قطب تارہ کیم جنوری }
ضہ ۸۸ ۲۶ ۵۳
ہم دیکھتے ہیں کہ محدودوں کے ان دو جھٹوں میں صعود مستقیم کے
درمیان پاؤ گھنٹہ سے زیادہ فرق اور میل کے درمیان پاؤ درجہ سے زیادہ
فرق پایا جاتا ہے۔ ان فرقوں پر بڑی توجہ کی ضرورت ہے۔
(۱۸۲) پہلی نظر میں یہ خیال ہو سکتا ہے کہ قطب تارے کے ظاہری محل کا
یہ تغیر خود اس کی حقیقی حرکتوں کا نتیجہ ہے۔ لیکن ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اس
منظر کی ایسی توجیہ نہیں کی جاسکتی۔ یہ ہو سکتا ہے کہ کسی نقطہ کے محدودوں
میں تبدیلیاں ان محوروں میں تبدیلیوں کی وجہ سے پیدا ہوں جن کے لحاظ
سے ان محدودوں کی پیمائش عمل میں آئی ہے یا خود نقطے کے محل میں مطلق تبدیلیوں
کا نتیجہ ہوں۔ ہم ثابت کرینگے کہ ستارے کے مقام میں یہ تبدیلیاں صرف
ظاہری ہیں۔ وہ ستارے کے مقام کی تبدیلیوں سے نہیں بلکہ اس بڑے
دارے کے مقام کی تبدیلیوں سے منسوب کیجانی چاہئیں جس کے حوالہ سے
ستارہ کا مقام تعین کیا جاتا ہے۔ یہ تبدیلیاں ان مظاہر کی وجہ سے پیدا
ہوتی ہیں جو استقبال اور کبجہ کے طور پر مشہور ہیں۔

اولاً قطب تارے کے میل پر غور کرو جو نصف صدی کے عرصہ میں
حسب مشاہدات ۱۶۲ سے زیادہ بڑھ چکا ہے یا سالانہ ۱۹ کی اوسط شرح سے
اس کے یہ معنی ہیں کہ قطب اور قطب تارے کا درمیانی فاصلہ سالانہ ۱۹ کی شرح سے

گھٹ رہا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قطب یا قطب تارہ یا دونوں حرکت میں ہونے چاہئیں۔

لیکن قطب تارے کے قطبی فاصلہ کے اس تغیر کا کوئی قابل قدر حصہ اس ستارے کی ذاتی حرکت (دفعہ ۶۰) سے منسوب نہیں کیا جاسکتا۔ اگر قریب کے ستاروں سے قطب تارے کا فاصلہ ناپا جائے تو اس میں کوئی ایسا تغیر نہیں پایا جاتا جس کا مقابلہ اس تغیر سے کیا جاسکے جو قطب تارے اور قطب کے درمیانی فاصلہ میں پایا جاتا ہے۔ قطب تارے کی اگر کوئی حقیقی ذاتی حرکت ہے بھی تو وہ اس قدر خفیف ہے کہ وہ اس تارے کے میل میں متبادلہ کردہ تبدیلیوں کا باعث نہیں ہو سکتی۔ یہ بھی واضح رہے کہ پچاس سال کے عرصہ میں دوسرے ستاروں کے قطبی فاصلوں میں بالعموم بڑا تغیر پایا جاتا ہے لیکن خود ستاروں کے باہمی فاصلوں میں کوئی قابل قدر تبدیلیاں نظر نہیں آتیں۔ پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ قطب تارے اور قطب کے درمیانی فاصلہ میں جو تبدیلیاں واقع ہوئی ہیں وہ خود قطب تارے کی حرکت سے منسوب نہیں کی جانی چاہئیں بلکہ انہیں قطب سماوی کی حرکت سے منسوب کرنا چاہئے۔ اب ہم اس حرکت کی نوعیت کا مطالعہ کریں گے۔

اگر قطب کمرہ سماوی پر اپنا محل مسلسل بدلتا ہے تو سماوی خط استواء کی بھی مسلسل حرکت ہونی چاہئے کیونکہ خط استواء پر کا ہر نقطہ ہر حال قطب سے ۹۰° پر ہونا چاہئے۔ چنانچہ خط استواء حرکت کرتا ہے لیکن طریق الشمس کے ساتھ اس کا اوسط میلان مستقل رہتا ہے۔ یہ زاویہ صرف چند ثانیوں کی مقدار میں طریق الشمس کی ایک جانب یا دوسری جانب متزلزل ہوتا ہے۔ وسط گرما میں سورج کا میل طریق الشمس کا میلان ہے اور یہ میلان ۱۸۵۶ء میں بھی وہی تھا اور ۱۹۰۶ء میں بھی وہی (دیکھو صفحہ ۲۸۸)۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ خط استواء کی حرکت اس طرح ہونی چاہئے کہ وہ طریق الشمس کو جسے ثابت تصور کیا گیا ہے تقریباً ایک مستقل زاویہ پر قطع کرے اور اعتدالی نقطے طریق الشمس زمین کی حرکت کی سمت کے مخالف حرکت کریں۔ طریق الشمس کے قطب کو

کرہ سماوی پر ثابت خیال کیا جاسکتا ہے اور مذکورہ بالا حرکت کی وجہ سے خط استواء کا قطب طرہی الشمس کے قطب کے گرد ایک چھوٹا دائرہ مرتسم کرتا ہے یہ وہ حرکت ہے جو اعتدالین کے قمر شمسی استقبال کے نام سے مشہور ہے۔ اس کا سادہ ترین اظہار کسی ستارہ کے طوائفہ میں مسلسل اضافہ کے ذریعہ ہوتا ہے درآئیکہ ستارہ کا عرض بلد غیر متبدل رہتا ہے۔ بالعموم قمر شمسی استقبال سے کسی جرم فلکی کے میل اور صعود و مستقیم دونوں میں تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

۵۵۔ قمر شمسی استقبال اور کبوتر کی طبعی توضیح۔ اس محور کی

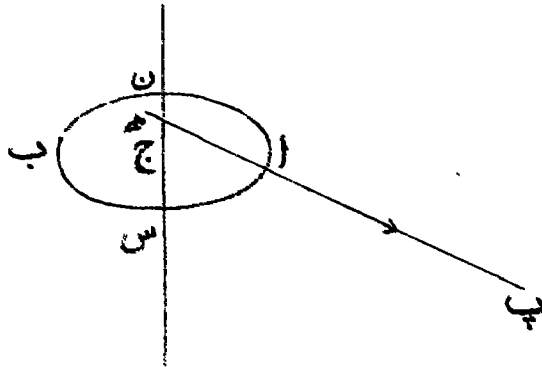
سمت میں جس کے گرد زمین اپنی یومی گردش کرتی ہے، بہت سست تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں اور یہ تبدیلیاں استقبال اور کبوتر کے مطابقت پیدا کرتی ہیں مستقل سمت سے زمین کے محور کا یہ خلل اس واقعہ کی وجہ سے ہے کہ زمین کے صعبے ایک کرہ نمائی جسم بیرونی صیم (چاند یا سورج) کی کشش کا حاصل زمین کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والی ایک واحد قوت نہیں ہے۔

اگر زمین فی الواقعہ ایک کروی استوار جسم ہوتی اور اگر ہر اندرونی ہم مرکز کروی غول کی سطح پر کثافت مستقل ہوتی تو کسی بیرونی جسم (جیسے کہ چاند یا سورج) کی کشش ایک قوت کے حامل ہوتی جو کرہ کے مرکز پر عمل کرتی۔ اگر کسی قوت کا خط عمل اس جسم کے مرکز ثقل میں سے گزرے جس پر یہ عمل کرتی ہے تو جسم کی گردش پر جو مرکز ثقل کے گرد ہو ایسی قوت کا کچھ اثر نہ ہوگا۔ لیکن ان حالات کے تحت جو نظام شمسی میں موجود ہیں نہ سورج کی کشش اور نہ چاند کی کشش زمین کے مرکز ثقل میں سے گزرتی ہے۔ اس لیے زمین کی گردش میں وہ خلل پیدا ہوتے ہیں جن پر اب ہم غور کریں گے۔

اگرچہ ان وجوہ کی بنیاد پر جو بعد میں بیان کئے جائیں گے استقبال کے پیدا کرنے میں سورج کی بہ نسبت چاند کا زیادہ حصہ ہے لیکن ہم پہلے سورج

اثر پر غور کریں گے کیونکہ زمین کے لحاظ سے اس کی انسانی حرکت چاند کی حرکت کی یہ نسبت زیادہ سادہ ہے۔

اگر ہم یہ مان لیں کہ زمین ایک گردشی جسم ہے اور خط استواء کے گرد متشکل ہے تو چونکہ ان میں (شکل ۵۰) زمین کا محور ہے اور ج ب کا مرکز اور پ کوئی بیرونی ذرہ اس لیے مستوی ن میں پ کے زمین کو متشکل تقسیم کرتا ہے اور اس لیے زمین پر پ کی حاصل کشش مستوی ن میں پ کے واقع ہوتی ہے نیز اگر پ خط استواء کے مستوی میں ہو تو حاصل کشش بھی اس مستوی میں ہوگی۔ اس لیے اگر پ اس مستوی کے مستوی ا ب میں واقع ہو تو حاصل کشش ج ب پر ہوگی۔ اگر پ محور ن میں ہوگا اس صورت پر غور کرنا ضروری نہیں ہے) تو یہ واضح ہے کہ حاصل کشش ج ب پر ہوگی لیکن پ کے کسی دوسرے مقام کے لیے جیسے کہ شکل ۵۰ میں دکھایا گیا ہے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ حاصل کشش ج میں سے نہیں نکلتا بلکہ مستوی ن میں پ میں واقع ہونے والے ہ پ کی طرح کے ایک خط پر عمل کرتی۔



شکل (۵۰)

پہلی نظر میں یہ خیال ہو سکتا ہے کہ یہ قوت ان میں کوھ پ گئے

عمود و اریست میں پھیرنے کا میلان رکھے گی یعنی بالفاظ دیگر جو تکہ تجاذبی جسم سورج ہے اس لیے ایسی قوت کا فوری اثر بظاہر یہ معلوم ہو گا کہ وہ زمین کے خط استوا کو طریق الشمس کی جانب لٹانے پر مجبور کرتی ہے۔ لیکن یہ واقعہ کہ زمین تیزی کے ساتھ گردش کر رہی ہے اس بظاہر متناقض اثر کا باعث ہے کہ محور N میں ہر لمحہ ایک ایسی سمت میں حرکت کرتا ہے جو مستوی N میں پ میں نہیں بلکہ اس پر عمود وار ہے۔

اس منظر کی بھی تمثیل معمولی لٹو سے ملتی ہے اگر چیکہ اس صورت میں ہم ایک جسم کے (جو فضا میں آزاد ہو) مرکز ثقل کے گرد گردش پر نہیں بلکہ ایک ثابت نقطہ کے گرد گردش پر بحث کر رہے ہیں۔ لیکن علم ریاضی کے نقطہ نظر سے یہ دونوں مسئلے بہت مشابہ ہیں۔ جبکہ لٹو اپنے تشاگل کے محور کے گرد تیز گردش کر رہا ہوتا ہے تو خود یہ محور آہستہ آہستہ انقباضی خط کے گرد ایک مخروط مرتب کرتا ہے۔ پس لٹو کا یہ محور ہر آن ایک ایسی سمت میں حرکت کر رہا ہوتا ہے جو اس سمت کے عمود وار ہوتی ہے جس میں قوت جاذبہ ارض اس کو لانا چاہتی ہے لیکن اس سمت کی طرف جانے سے روکنے والا صرف یہ واقعہ ہے کہ لٹو کی گردش اپنے محور کے گرد خود محور کی مخروطی گردش کی بہ نسبت بہت زیادہ تیز ہے۔

زمین کی یومی حرکت اس کے محور کی مخروطی حرکت کے مقابلہ میں بہت تیز معلوم ہوتی ہے کیونکہ موخر الذکر کا دور تقریباً ۲۴۵۰۰ سال ہے۔ لٹو کے محور کی مخروطی گردش کی تمثیل کو زمین کی گردش کی صورت پر (جبکہ سورج کے لحاظ سے پیدا شدہ غلط زیر غور ہو) استعمال کیا جائے تو ہمیں اس امر کی توقع رکھنی چاہئے کہ ارضی محور N میں طریق الشمس کے مستوی کے عماد کے گرد آہستہ آہستہ ایک قائم مستدیر اسطوانہ مرتب کرے گا۔

چاند کا استقبالی غل سورج کی بہ نسبت زیادہ اہم ہے کیونکہ زمین پر چاند کی کل کشش سورج کی کشش کی بہ نسبت بہت ہی کم ہے تاہم چونکہ استقبالی اثر ان کششوں کے درمیانی فرق پر محصور ہوتا ہے جو زمین کے مختلف حصوں پر غل ڈالنے والا

جسمِ عالم کرتا ہے اس لیے چاند کی قربت اس کے استقبالی اثر کو سورج کے اثر کا تقریباً گنا کر دیتی ہے۔

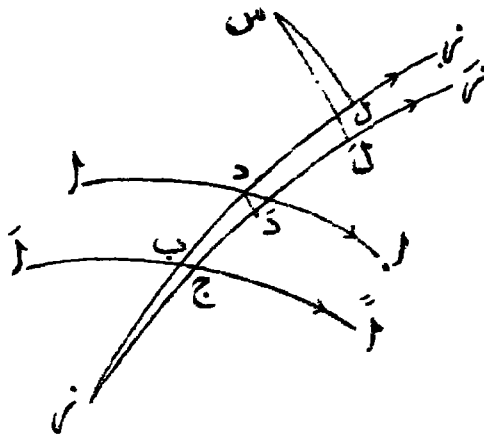
چاند کے مدار کا مستوی طریق الشمس کے بہت قریب ہے چنانچہ وہ صرف ۵° کا چھوٹا زاویہ طریق الشمس سے بناتا ہے۔ چاند کا مدار اس میلان قائم رکھتے ہوئے مسلسل حرکت میں رہتا ہے اور اس کا عقدہ طریق الشمس کا پورے چکر تقریباً ۱۹ سال میں ختم کرتا ہے، مگر یہ مدت ۲۶۰۰۰ سال کے استقبالی دور کے مقابلہ میں بہت چھوٹی ہے۔ چونکہ چاند طریق الشمس سے ہمیشہ قریب رہتا ہے اور جتنا اس کے نیچے رہتا ہے اتنا ہی اوپر اور چونکہ اس کے مدار کا اوسط محل طریق الشمس پر منطبق ہوتا ہے اس لیے یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ چاند کے استقبالی عمل کا اصل حصہ اسی عام اثر کا تقاضی ہے جو سورج کے عمل کا ہے۔ سورج کا عمل اور چاند کے عمل کا یہ حصہ قمر شمس استقبال کا باعث ہوتے ہیں جس کی وجہ سے اس محل ۷° طریق الشمس پر سالانہ ۱/۵° کی شرح سے اس سمت میں حرکت کرتا ہے جو بڑھتے طول بلدوں کے مخالف ہے۔ اس مقدار کا تغیر بتا دوہرائی حصہ چاند کے عمل کی وجہ سے ہے اور باقی سورج کے عمل کی وجہ سے۔ خط استواء کے ساتھ طریق الشمس کا میلان ۳۶° قمر شمس استقبال کی وجہ سے نہیں بدلتا۔

لیکن چاند کا ایک اہم اثر اس وجہ سے بھی ہے کہ اس کی حرکت اگرچہ طریق الشمس کے قریب ہے لیکن ٹھیک طریق الشمس کے مستوی میں نہیں ہے۔ چاند کے استقبالی عمل کا اقتضایہ ہے کہ زمین کا محور چاند کے مدار کے قطب کے گرد ایک مخروط مرتسم کرے لیکن خود چاند کا قطب طریق الشمس کے قطب کے گرد ۵° کے نصف قطر کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ اس کا اثر خط استواء کے مستوی پر دو گونہ ہے۔ ایک یہ کہ اس کی باعث اس محل ۷° اپنے اوسط مقام کے گرد مہیں کی کشین قمر شمس استقبال کے لحاظ سے کی گئی ہو طریق الشمس پر آگے پیچھے چھوٹے دور کی (۱۷۶)

ایک اہمتر از می حرکت رکھتا ہے۔ دوسرے یہ کہ سہ بھی اپنی اوسط قیمت کے گرد آگے پیچھے خفیف اہمتر از کرتا ہے۔ یہ منظر ہر کبو (Nutation) کے طور پر معروف ہیں اور ان کا انکشاف بریڈلے (Bradley) کے بڑے کارناموں میں سے ایک ہے۔ کبو کے پیدا کرنے میں سورج کا بھی کچھ اثر ہے لیکن وہ چاند کے اثر کے مقابلہ میں بہت قلیل ہے۔

۵۶۔ سیارہ ہی استقبال۔ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں قمر شمس استقبال

اور کبو خط استواء اور طریق الشمس کے اضافی محل میں تبدیلی پیدا کرتے ہیں اور اس کی وجہ اول الذکر کی حرکت ہے۔ اب ہمیں یہ یاد دلانا چاہئے کہ خود طریق الشمس بالکل ایک ثابت مستوی نہیں ہے اور اس میں تبدیلیاں ہوتی رہتی ہیں اگرچہ یہ تبدیلیاں اس قدر قلیل ہیں کہ ان کو اکثر مقاصد



شکل (۵۸)

کے لیے غیر موجود سمجھا جاسکتا ہے اور طریق الشمس کو بالکل ثابت فرض کیا جاسکتا ہے۔ زمین پر دوسرے سیاروں کی کششوں کی وجہ سے طریق الشمس کی

یہ حرکتیں پیدا ہوتی ہیں۔ اس لئے 'لی نقطوں کے محلوں میں اس طرح جو بیقاعدگی پیدا ہوتی ہے اُس کو سیاروں کے استقبال کہتے ہیں کیونکہ اس کا باعث زمین پر سیاروں کی کششیں ہیں۔

ہمیں طریقی اشمس کا کوئی سیاری محل لینا چاہئے تاکہ دوسری تاریخوں پر اس کے محل کا واسطہ اس سیاری محل کے ذریعہ دیا جاسکے۔ اس مقصد کے لیے ہم وہ بڑا دائرہ لیتے ہیں جس پر طریقی اشمس ۱۸۵۵ء کے آغاز میں منطبق ہوا تھا، فرض کرو کہ یہ بڑا دائرہ نما نما ہے (شکل ۵۸)۔ فرض کرو کہ ۱۸۵۵ء میں طریقی اشمس کا محل نما نما ہے۔ فرض کرو کہ ۱۸۵۵ء کے آغاز میں خط استوا کا محل Γ ہے اور فرض کرو کہ وقت ۱۸۵۰ء پر خط استوا قمر شمس استقبال کی وجہ سے Γ تک حرکت کر چکا ہے۔ فرض کرو کہ ایک ستارہ δ سے نما نما اور نما نما پر عمود δ سے Γ کے نقطہ تقاطع δ سے نما نما پر عمود δ ڈالا گیا ہے۔ اب ہمیں حسب ذیل مواد ملتا ہے۔

ت سال میں قمر شمس استقبال ب د ہے۔

۱۸۵۵ء میں اعلیٰ طریقی اشمس کا میلان زاویہ د ج ہے۔

۱۸۵۰ء میں ثابت طریقی اشمس کا میلان زاویہ د ب ہے۔

ب ج چونکہ خط استوا پر وہ فاصلہ ہے جس میں سے عقدہ ت سال میں طریقی اشمس کی حرکت کی وجہ سے منتقل ہو چکا ہے اس لیے وہ سیاروی استقبال ہے اور اس کی مقدار ۱۳.۵ ت معلوم ہوتی ہے۔

لہ سیاروی استقبال کے متعلق اور زیادہ معلومات حاصل کرنے کے لیے نیو کمب (New comb) کی کمپیوٹیم آف اسٹریکل اسٹرانومی کا مطالعہ کیا جائے جس میں یہاں مستعمل عددی قیمتیں لی گئی ہیں۔

ج د کو طول بلد میں عام استقبال کہتے ہیں۔ خط استواء اور قطب پر
طریق اشمس کے نقطہ تقاطع کا ثانی الذکر پہنچاؤ عام استقبال ہے اور اس کا
سالانہ اضافہ بتاریخ ۱۸۵۰ء سے حسب ذیل ہے

$$۵۰۶۲۲۵۳ + ۰۱۰۰۰۲۲۲۵ = ۵۰۶۲۲۵۳$$

اس مقدار کو استقبال کا مستقل کہتے ہیں۔ یہ بہت ہی سستی سے بدلتا

ہے چنانچہ ۱۹۰۰ء میں اس کی قیمت ۵۰۶۲۵۶۴ تھی اور ۱۹۵۰ء میں

۵۰۶۲۶۷۵ ہو گئی۔ آج کل استقبال کے مستقل کو ۵۰۶۲۶ لینا ہمارے مقاصد کے لیے
کافی صحیح ہے۔

۱۸۵۰ء میں استواء اور اسی تاریخ کے طریق اشمس کے
درمیان زاویہ (دوری ریموں کو نظر انداز کر کے) حسب ذیل ہے

$$۲۳^{\circ} ۲۴' - ۳۲۶۰ - ۰۶۴۷ = ۲۳^{\circ} ۲۴'$$

اس کی دوسری رقم کو میلان کی قرنی (Secular) تبدیلی کہتے ہیں۔
شکل میں تیروں کی سمتوں کا مشاہدہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ثابت
طریق اشمس پر اصلی طریق اشمس کا مخروطی عقدہ نما ہے اور اس لیے ثابت
طریق اشمس پر اصلی طریق اشمس کے صعودی عقدہ کا طول بلد ۸۰°- نرج
ہے۔

ستارہ میں کا طول بلد جو ۱۵۰° میں دل تھا ۱۸۵۰ء میں
قرنی استقبال کی باعث بال ہو جاتا ہے۔ اس کا عرض بلد یعنی
میں دل قرنی استقبال سے نہیں بدلتا۔

اگر سیارہ استقبال اور قرنی استقبال دونوں کو ملحوظ رکھا جائے
تو میں کا طول بلد جو ۱۵۰° میں دل تھا ۱۸۵۰ء میں ج دل
ہو جاتا ہے اور اسی طرح عرض بلد میں دل سے دل تک بدلتا ہے۔

۵۷۔ صعود مستقیم اور میل کی رقوم میں استقبال اور کبوتر کیلئے عام ضابطے۔

(۱۷۸)

ہم بالعموم یہ مان لیتے کہ طریق الشمس کا مستوی غیر متغیر رہتا ہے اور یہ کہ طریق الشمس کے خلاف سے خط استواء کے محل میں استقبال اور کبوتر کی باعث سست تبدیلیاں ہوتی ہیں۔ یہ تبدیلیاں صرف ان طریقوں پر واقع ہوتی ہیں جن کے مطابق کرہ کا ایک بڑا دائرہ بدل سکتا ہے یعنی عقدوں کا خط بدلتا ہے اور طریق الشمس کا میلان بھی بدلتا ہے۔ اگر ان بڑے دائروں میں جن کے خلاف سے کسی ستارے کے محدودا ہے جاتے ہیں کوئی تبدیلیاں ہوتی ہیں ان تبدیلیوں کی وجہ سے ستارہ کے محدودوں میں بھی تبدیلیاں ہوں گی اگرچہ چھوٹے ہیں۔ اب ہم فرض کریں گے کہ سواوی پر ستارہ کے مقام میں فی الواقع کوئی تبدیلی نہ ہو۔ خط استواء کے دو محلوں پر غور کرو۔ فرض کرو کہ پہلا محل طریق الشمس کو ایک اعتدالی نقطہ ۲ پر قطع کرتا ہے اور طریق الشمس کے ساتھ استس کا میلان سہ ہے۔ فرض کرو کہ دوسرا محل طریق الشمس کو ایک اعتدالی نقطہ ۲ پر قطع کرتا ہے جو طریق الشمس پر گھٹنے والے طول بلدوں کی سمت میں قوس ک میں سے حرکت کر چکا ہے اور میلان سہ سے سہ تک بدل چکا ہے (شکل ۵۹)۔

فرض کرو کہ پہلے خط استواء اور اعتدال کے حوالے سے (نظام اول) ایک ستارہ سس کا صعود مستقیم اور میل علی الترتیب عہ اور ضہ ہیں اور دوسرے خط استواء اور اعتدال (نظام دوم) کے حوالے سے اسی ستارے کے محدود عہ اور ضہ ہیں۔

فرض کرو کہ ان دو نظاموں کے حوالے سے ایک دوسرے ستارے کے متناظر محدود عہ، ضہ، اور عہ، ضہ ہیں۔
اب چونکہ قوس سس کا طول وہی ہے خواہ محدودوں کا کوئی

نظام لیا جائے اس لیے حسب ذیل اساسی مساوات
 جب ضہ جب ضہ + جم ضہ جم ضہ (ع - ع)
 = جب ضہ جب ضہ + جم ضہ جم ضہ (ع - ع)
 حاصل ہوتی ہے جو دفعہ ۱۲ میں استعمال کی جا چکی ہے۔
 اب ہم اس مساوات پر تین ایسی صورتیں لیکر غور کریں گے جن میں
 ع، ضہ، اور ع، ضہ فوراً معلوم ہوتے ہیں اور اس طرح استحال کی تین
 مساواتیں حاصل کریں گے۔
 اگر دوسرا ستارہ سن ۲ پر ہو تو اس کے محدود نظام اول
 میں حسب ذیل ہیں

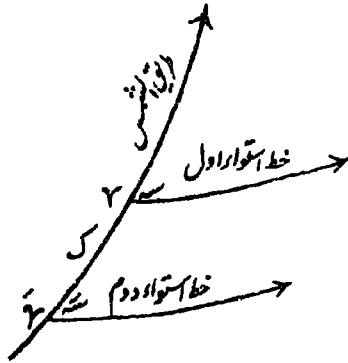
ع = ۰، ضہ = ۰
 اسی ستارے کے محدود دوسرے نظام میں مساواتوں سے
 جب ضہ = جب ک جب سہ
 جم ضہ جب ع = جب ک جم سہ
 جم ضہ جم ع = جم ک

سے ملتے ہیں۔

(۱۷۹) ان قیمتوں کو اساسی مساوات میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے
 جم ضہ جم ع = جب ک جب سہ جب ضہ
 + جم ک جم ضہ جم ع + جب ک جم سہ جم ضہ جب ع (۱)
 اسی طرح سن کو ۲ پر لینے سے حاصل ہوتا ہے
 جم ضہ جم ع = جب ک جب سہ جب ضہ + جم ک جم ضہ جم ع
 - جب ک جم سہ جم ضہ جب ع (۲)
 بالآخر فرض کرو کہ یہ دوسرا ستارہ سن طریق الشمس کے قطب
 پر ہے تو نظام اول میں اس کے محدود ہیں
 ع = ۰، ضہ = ۰، سہ = ۰

اور نظام دوم میں

$$\text{عہ} = ۲۷۰^\circ \text{، ضہ} = ۹۰^\circ - \text{سہ}$$



شکل (۵۹)

اساسی مساوات میں ان قیمتوں کو داخل کرنے سے حاصل ہوتا ہے
جب ضہ جم سہ - جم ضہ جب سہ جب سہ
= جب ضہ جم سہ - جم ضہ جب سہ جب سہ (۳)
اس طرح عہ ضہ کو عہ ضہ اور ضروری مستقلات ک سہ سہ
کے ساتھ ملانے والی تین عام مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔
یہ ظاہر ہے کہ مساوات (۳) زبر زدہ اور غیر زبر زدہ حروف
میں متشکل ہے اور یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ (۲) کو (۱) سے
کس طرح زبر زدہ اور غیر زبر زدہ حروف کے باہمی تبادلہ اور ک کی علامت
بدلنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اگر معلومہ مقادیر عہ ضہ ہوں تو (۱) (۲) (۳) سے ہم
جب ضہ اور جم ضہ جب عہ کو عہ ضہ کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں
اور اس طرح حسب ذیل تین مساواتوں (۴) (۱) (۵) کو ایک جٹ میں (۱۸۰)
رکھ سکتے ہیں جس سے عہ ضہ بغیر ابہام کے معلوم ہو سکتے ہیں :-
جب ضہ = جب ضہ (جم ک جب سہ جب سہ + جم سہ جم سہ)

- جم ضہ جم عہ جب سہ جب ک
 + جم ضہ جب عہ (جم ک جب سہ جم سہ - جم سہ جب سہ) (۴)
 جم ضہ جم عہ = جب ضہ جب ک جب سہ
 + جم ضہ جم عہ جم ک
 + جم ضہ جب عہ جب ک جم سہ (۱)
 جم ضہ جب عہ = جب ضہ (جم ک جم سہ جب سہ - جب سہ جم سہ)
 - جم ضہ جم عہ جم سہ جب ک
 + جم ضہ جب عہ (جم ک جم سہ جم سہ - جب سہ جب سہ)
 (۵)
 اگر عہ ضہ دے گئے ہوں اور عہ ضہ معلوم کرنے ہوں تو انہی طرح
 حسب ذیل تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں :-
 جب ضہ = جب ضہ (جم ک جب سہ جب سہ - جم سہ جم سہ)
 + جم ضہ جم عہ جب سہ جب ک
 + جم ضہ جب عہ (جم ک جب سہ جم سہ - جم سہ جب سہ) (۶)
 جم ضہ جم عہ = - جب ضہ جب ک جب سہ
 + جم ضہ جم عہ جم ک
 - جم ضہ جب عہ جب ک جم سہ (۲)
 جم ضہ جب عہ = جب ضہ (جم ک جم سہ جب سہ - جب سہ جم سہ)
 + جم ضہ جم عہ جم سہ جب ک
 + جم ضہ جب عہ (جم ک جم سہ جم سہ - جب سہ جب سہ)
 (۷)
 استقبال محسوب کرنے میں ک کو بالعموم استفہ رچھوٹا سمجھا جاسکتا
 ہے کہ اسکی پٹی سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کی جاسکتی ہیں اور نیز ہم لیتے ہیں سہ سہ
 اس لیے ضابطے (۶)، (۲)، (۷) ہو جاتے ہیں
 جب ضہ = جب ضہ + ک جب سہ جم ضہ جم عہ

جم ضہ جم عہ = جم ضہ جم عہ - ک جب سہ جب فہ - ک جم سہ جم ضہ جب عہ
 جم ضہ جب عہ = جم ضہ جب عہ + ک جم سہ جم ضہ جم عہ
 ان سے ہمیں باسانی حسب ذیل تقریبی ضابطے حاصل ہوتے ہیں
 عہ - عہ = ک جم سہ + ک جب سہ مس ضہ جب عہ (۸)
 ضہ - ضہ = ک جب سہ جم عہ (۹)
 یہ ضابطے استقبال کے لیے اساسی ضابطے ہیں۔

مثال ۱ - اگر ایک ستارے کا میل اور صعود مستقیم ضہ 'عہ ہوں تو ثابت (۱۸۱)
 کرو کہ استقبال کی باعث صعود مستقیم میں سالانہ اضافہ قوس کے ثانیوں میں
 $۲۰ + ۲۰$ مس ضہ جب عہ کے بہت قریب ہوگا اور میل میں سالانہ اضافہ
 ۲۰ جم عہ ہوگا۔

مثال ۲ - خط استواء کے قطب کی زاویہ ارتفاع طریقی الشمس کے قطب کے
 گرد ک ہے، طریقی الشمس کی گردش کے فوری محور کا طول بلد کی ہے، اور اس کی
 زاویہ ارتفاع عا ہے۔ ثابت کرو کہ حوالہ کے مستویوں کی ان تبدیلیوں سے کسی
 ستارے کے صعود مستقیم عہ اور میل ضہ میں تبدیلی کی سالانہ شرحیں

$m + n$ جب عہ مس ضہ اور n جم عہ

پیدا ہوتی ہیں جہاں $m = k$ جم سہ - عا جب لی قم سہ ہے
 اور $n = k$ جب سہ، جہاں سہ طریقی الشمس کے ساتھ استواء کا میل

مثال ۳ - ثابت کرو کہ کرہ سماوی پر کے وہ نقطے جن کے میل ایک
 دی ہوئی مدت میں اعتدالوں کے استقبال کی وجہ سے بڑی سے بڑی تبدیلی میں
 گذرتے ہیں ایک بڑے دائرے کی دو قوسوں پر واقع ہوتے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ
 وہ نقطے جن کے میل اس مدت کے اختتام پر غیر متغیر رہتے ہیں ایک دوسرے
 بڑے دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ خط استواء کے قطب اس مدت کی ابتداء اور ختم پرق 'ق' ہیں۔
 تو ہندسی طور پر یہ واضح ہے کہ اس مدت میں استقبال کی باعث میل کی بڑے سے بڑی

مکان تبدیلی قوس ق ق کے مساوی ہے اور یہ کہ دو ستارے جو اس تبدیلی میں سے گزرتے ہیں ق ق میں سے گزرنے والے بڑے دائرے پر واقع ہیں اور قوس ق ق اور اس کے تحت قدمی قوس کی حدود سے باہر ہیں۔ وہ ستارے جن کے میل اس مدت کے ختم پر غیر متغیر رہتے ہیں اسی بڑے دائرہ پر واقع ہیں جو قوس ق ق کی علی القوائم تصنیف کرتا ہے۔

مثال ۴۔ اگر ایک ستارہ دائرہ اعتدال میں پر واقع ہو تو ثابت کر دو کہ وہ میل میں استقبال نہیں رکھتا۔ نیز ثابت کر دو کہ دائرہ اعتدال میں پر کے سب نقطے صعود مستقیم و نیز میل میں ایک ہی استقبال رکھتے ہیں۔

مثال ۵۔ ثابت کر دو کہ اگر میں ایک ستارہ ہو جس کے صعود مستقیم استقبال نہیں ہے اور خط استوا و طریق الشمس کے قطب علی الترتیب ق اور ک ہوں تو ق اور میں گ علی القوائم ہونگے۔

مثال ۶۔ ثابت کر دو کہ دو سب ستارے جنکا صعود مستقیم استقبال کی وجہ سے فی الحال نہیں بدلتا ایک ناقصی مخروط پر واقع ہوتے ہیں جو خط استوا اور طریق الشمس کے قطبوں میں سے گزرتا ہے۔

شرط ہے، دیکھو (۸)

جم سہ + جب سہ سہ ضد جب عہ =

اگر جم دھیں لا = رجم عہ جم ضد

ما = رجب عہ جم ضد

ی = رجب ضد

اور راء عہ ضد کو س قط کریں تو مخروط کی مساوات حاصل ہوتی ہے

ما ی جب سہ + (لا + ما) جم سہ =

مثال ۷۔ ثابت کر دو کہ ان سب ستاروں کے لیے جن کے میل میں خط استوا کے عقدہ کی طریق الشمس میں حرکت کی وجہ سے تغیر کی شرح اپنی بڑی سے بڑی قیمت (یعنی ہے صعود مستقیم میں تغیر کی شرح) اسی سبب (م) م سہ ہے چہاں سہ طریق الشمس اور خط استوا کا درمیانی زاویہ ہے۔

(۱۸۳۳)

مثال ۸۔ ضابطوں (۱) (۲) (۳) سے ثابت کرو کہ سہ اور ک کے لحاظ سے عہہ، ضہہ کے تفرقی سروں کے لیے حسب ذیل جملے حاصل ہوتے ہیں:-

$$\frac{\text{جف عہہ}}{\text{جف سہہ}} = - \text{مس ضہہ جم عہہ} \quad \text{جف ضہہ} = \text{جب عہہ}$$

$$\frac{\text{جف عہہ}}{\text{جف ک}} = \text{جم سہہ} + \text{جب سہہ مس ضہہ جب عہہ} \quad \text{جف ک} = \text{جب سہہ جم عہہ}$$

(۶) کو سہہ کے لحاظ سے تفرق کرنے اور عہہ، ضہہ، ک، سہہ کو مستقل سمجھنے سے مساوات (۷) کی بنا پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم ضہہ} \frac{\text{جف ضہہ}}{\text{جف سہہ}} = \text{جم ضہہ جب عہہ}$$

اس لیے صورت ضہہ = ۹۰ کو خارج کرنے سے

$$\frac{\text{جف ضہہ}}{\text{جف سہہ}} = \text{جب عہہ}$$

(۲) کو سہہ کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$\text{جم ضہہ جب عہہ} \frac{\text{جف عہہ}}{\text{جف سہہ}} + \text{جب ضہہ جم عہہ} \frac{\text{جف ضہہ}}{\text{جف سہہ}} = ۰$$

اس لیے $\frac{\text{جف ضہہ}}{\text{جف سہہ}}$ کی بجائے جب عہہ رکھنے سے

$$\frac{\text{جف عہہ}}{\text{جف سہہ}} = - \text{مس ضہہ جم عہہ}$$

(۶) کو ک کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$\text{جم ضہہ} \frac{\text{جف ضہہ}}{\text{جف ک}} = \text{جب سہہ} - \text{جب ضہہ جب ک جب سہہ} + \text{جم ضہہ جم ک} - \text{جم ضہہ جب عہہ جب ک جم سہہ}$$

$$= \text{جب سہہ جم ضہہ جم عہہ}$$

$$\frac{\text{جف ضہہ}}{\text{جف ک}} = \text{جب سہہ جم عہہ}$$

اس لیے

بالآخر (۳) کوک کے لحاظ سے تفرق کرنے اور $\frac{\text{جف ضہ کی محصلہ بالاقیمت}}{\text{جف ک}}$

کو درج کرنے سے

۰ = جم ضہ جم سہ جب سہ جم عہ + جب ضہ جب سہ جب عہ جب سہ جم عہ

- جم ضہ جب سہ جم عہ $\frac{\text{جف عہ}}{\text{جف ک}}$

اس لیے $\frac{\text{جف عہ}}{\text{جف ک}} = \text{جم سہ} + \text{جب سہ مس ضہ جب عہ}$

مثال ۹ - ثابت کرو کہ استقبال حرکت کے باوجود سماوی خطا استواء ہمیشہ دو ثابت چھوٹے دائروں کو مس کرتا ہے۔

مثال ۱۰ - اگر میلان میں تبدیلی صف سہ ہو اور ۶ میں کوئی تبدیلی نہ ہو تو ثابت کرو کہ

جم عہ جم ضہ = جم عہ جم ضہ

جب عہ جم ضہ = جب عہ جم ضہ جب صف سہ - جب ضہ جب صف سہ

جب ضہ = جب عہ جم ضہ جب صف سہ + جب ضہ جم صف سہ

جہاں عہ ضہ علی الترتیب ایک ستارہ کے وہ صعود مستقیم اور میل ہیں جو اس تبدیلی سے متاثر ہیں اور عہ ضہ وہ صعود مستقیم اور میل جو اس تبدیلی سے غیر متاثر ہیں۔

مثال ۱۱ - فرض کرو کہ ایک دی ہوئی آن پر ایک ستارہ کا صعود مستقیم اور میل عہ ضہ ہیں استقبال کا مستقل ک ہے اور طریق شمس کا میلان سہ۔

اگر جملہ جب سہ جب ضہ + جم سہ جم ضہ جب عہ کو (۱) سے اور جملہ جم عہ جم ضہ کو (۲) سے تعبیر کیا جائے تو ت سال بعد اسی ستارے کے لیے ان جملوں کی قیمتیں ہوں گی

(جم ک ت + ب جب ک ت اور ب جب ک ت) - (جب ک ت

نیز اگر اس مدت میں میل ضہ سے ضہ ہو جائے تو

جب ضہ - جب عہ = جب سہ (۱ - جم ک ت) ب جب ک ت

ہم دیکھتے ہیں کہ جہاں تک استقبال کا تعلق ہے جملہ
(جب سہ جب ضہ + جم سہ جب ضہ عہ) + (جم عہ جم ضہ)^۲
ایک غیر متغیر ہے اور یہ دیکھنا آسان ہے کہ یہ جملہ ہمیشہ عرض بلد کی جیب التمام کا
مربع ہوتا ہے۔ جملہ

جب ضہ جم سہ۔ جم ضہ جب عہ جب سہ
بھی جو عرض بلد کی جیب ہے بلاشبہ ایک غیر متغیر ہے اور اس وجہ سے ضابطہ
(۳) فوراً لکھ لیا جاسکتا تھا۔

مثال ۱۲۔ ثابت کرو کہ استقبال کی باعث ایک ستارہ کا مسعود مستقیم
جو طریق الشمس کے قطب سے $\frac{1}{4} 23^\circ$ سے زیادہ فاصلہ پر ہو تمام ممکن تبدیلیوں میں
گزرے گا لیکن اگر ستارہ کا مسعود مستقیم طریقی الشمس کے قطب سے $\frac{1}{4} 23^\circ$ سے
کم فاصلہ پر ہو تو وہ ہمیشہ ۱۲ گھنٹوں سے بڑا ہوگا۔

اگر لا = مس $\frac{1}{4}$ ک تو مساواتوں (۲) اور (۷) سے حاصل ہوتا ہے
لا (۲) جب ضہ جب سہ جم سہ + جم ضہ جب عہ جم ۲ سہ۔ مس عہ جم ضہ جم عہ
۲۔ لا (جم ضہ جم عہ جم سہ + مس عہ جب ضہ جب سہ + مس عہ جم ضہ جب عہ جم سہ)
+ مس عہ جم ضہ جم عہ۔ جم ضہ جب عہ = ۰

اس دو درجہ کی اصلوں کے حقیقی ہونے کی شرط باسانی حسب ذیل حاصل
ہوتی ہے

مس عہ جم ۲ بہ + جم ۲ سہ۔ جب ۲ بہ < ۰
جہاں بہ ستارہ کا عرض بلد ہے۔ اگر بہ > (۹۰۔ سہ) تو عہ کی ہر قیمت
کے جواب میں ک کی ایک حقیقی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

نیز مثال (۱۱) سے حاصل ہوتا ہے

جب ضہ جم سہ۔ جم ضہ جب عہ جب سہ = جب بہ
اگر بہ < (۹۰۔ سہ) تو جب عہ ہمیشہ منفی ہونا چاہیے۔

مثال ۱۳۔ لا کا محور اعتدال ربیع میں سے گزرتا ہے، یا کا محور
خط استواء کے مستوی میں ہے اور محور لا پر عمود ہے، ی کا محور زمین کا قطبی محور ہے

فرض کرو کہ ان قائم محوروں کے حوالہ سے ایک ستارے کے محدود لا، ما، ی ہیں۔
مان لو کہ طریق اشمس ثابت ہے اور استقبال کو طریق اشمس کے قطب کے گرد
خط استواء کے قطب کی گردش سے تعبیر کیا جاسکتا ہے جس کی زاویہ شرح ق ہے
فرض کرو کہ ت سال کے وقفہ کے بعد اس ستارہ کے محدود محوروں کے نئے محلوں
کے حوالہ سے ضا، عا، طا ہیں۔

ثابت کرو کہ محدودوں کے ان دو جڑوں کے درمیان حسب ذیل روابط ہیں
ضا = لاجم ق ت - ماجم سہ جب ق ت - ی جب سہ جب ق ت
عا = لاجم سہ جب ق ت + ماجم سہ جب ق ت + ی جب سہ جب سہ (جم ق ت - ا)
طا = لاجم سہ جب ق ت + ماجم سہ جب سہ (جم ق ت - ا) + ی (جب سہ جب ق ت + جم سہ)
جہاں سہ طریق اشمس کا میلان ہے۔

چونکہ (۱۸۳)

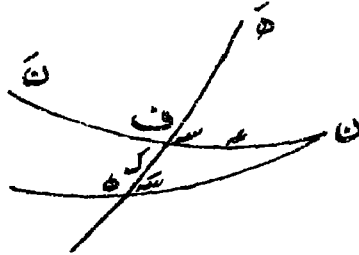
$$\begin{aligned} \text{لا} &= \text{جم ضہ جم عہ} & \text{ضا} &= \text{جم ضہ جم عہ} \\ \text{ما} &= \text{جم ضہ جب عہ} & \text{عا} &= \text{جم ضہ جب عہ} \\ \text{ی} &= \text{جب ضہ} & \text{طا} &= \text{جب ضہ} \end{aligned}$$

اس لیے ک = ق ت رکھنے اور سہ = سہ فرض کرنے سے مطلوبہ نتیجہ مساواتوں
(۲)، (۶)، (۷) سے فوراً حاصل ہوتے ہیں۔

* مثال ۱۴ - یہ فرض کر کے کہ ایک مدار کا قطب یکساں رفتار سے ایک
چھوٹے دائرہ میں حرکت کرتا ہے معلوم کرو کہ کونسے بڑے دائروں پر عقدوں
کی حرکت (۱) یکساں ہے (۲) مسلسل لیکن متغیر ہے (۳) بہت زیادہ ہے اور ثابت
کرو کہ آخری صورت میں عقدہ کی راست حرکت رجعی حرکت کی بہ نسبت زیادہ وقت
لیتی ہے۔

فرض کرو کہ سہ (۹۰°) اس دائرہ کا نصف قطر ہے جو متحرک قطب ق ثابت
نقطہ ق کے گرد متسم کرتا ہے تو دو بڑا دائرہ ج جس کا قطب ق ہے دائرہ ج کو
جس کا قطب ق ہے مستقل زاویہ سہ پر قطع کرتا ہے۔ عقدہ یکساں طور پر
ج پر حرکت کرتا ہے اور ج کے سوا کوئی اور بڑا دائرہ نہیں ہے جس پر عقدہ یکساں
طور پر حرکت کرتا ہو۔ ج کے متوازی دو چھوٹے دائرے ج اور ج گھینچو جو

ج کی مخالف سمتوں میں ہوں اور اس سے مستقل فاصلہ سے پرواقع ہوں۔ اب چونکہ ج پر کا کوئی نقطہ ج سے سے زیادہ فاصلہ پر نہیں ہو سکتا اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج پر کے سب نقطے ج اور ج کے درمیانی منطقہ سے واقع ہونے چاہئیں۔ اس لیے کسی دوسرے دائرہ و سے منقطع ہونے والے ج کے تمام ممکن عقدے اس منطقہ سے میں محدود ہیں۔



شکل (۶۰)

دائرہ ج، ج اور ج کو جن نقطوں پر اس کرتا ہے اپنے متصل محل سے ان نقطوں پر منقطع ہوتا ہے۔ اس لیے اگر وہ عقدہ جس میں دائرہ ج کسی اور دائرہ و کو قطع کرتا ہے مقیم ہو تو یہ عقدہ ج یا ج پر واقع ہونا چاہئے۔ اگر وہ عقدہ جس میں ثابت دائرہ و ج سے منقطع ہوتا ہے مسلسل آگے بڑھے تو اسے کسی نقطہ پر مقیم نہ ہونا چاہئے اور اس لیے و کو ج اور ج کے ساتھ کوئی حقیقی نقاط تقاطع نہیں رکھنے چاہئیں اس لیے اس منطقہ سے کے اندر محدود ہونا چاہئے۔

اگر و منطقہ سے کے اندر محدود نہیں ہے تو عقدہ سے صرف اہتزاز کر سکتے ہیں کیونکہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں عقدہ منطقہ سے کے اندر واقع ہوئے ہیں لہذا یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ و کے ان حصوں میں داخل نہیں ہو سکتے جو سے کے باہر ہیں اور اس لیے ہر عقدہ کو ان دو قوسوں میں سے ایک میں اہتزاز کرنا چاہئے جو و پر سے سے منقطع ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ ج اور ج کے ساتھ ج کے نقاط تماس ت اور ت

چونکہ مس سہ م سہ مثبت ہے اس لیے ک \times ۹۰ یعنی ۲ ک نصف محیط سے کم ہے اس لیے امتزازی حرکت میں عقدوں کی جمعی حرکت راست حرکت کی بہ نسبت کم وقت لیتی ہے۔

* مثال ۱۵۔ وہ وقفہ جو ایک دے ہوئے نصف النہار پر ایک ہی ستارے کے دو متصل مردروں کے درمیان ہوتا ہے استقبال کی وجہ سے ایک اوسط کو کجی یوم سے مختلف ہوگا۔ اگر ستارہ کا عرض التمام قطب کے عرض التمام سے کم ہو تو ثابت کرو کہ یہ فرق معدوم ہوگا جبکہ قطب اور ستارہ کے طول بلدوں کا

فرق جم' مس (ستارہ کا عرض التمام) ہو۔
مس (قطب کا عرض التمام)

* مثال ۱۶۔ اگر ایک دوہرے تارے کے چھوٹے جزو ترکیبی کا زاویہ محل لمحہ تہ پر م ہو تو ثابت کرو کہ اگر صرف استقبال کا اثر ملحوظ رکھا جائے تو کسی دوسرے لمحے تہ پر زاویہ محل م مساوات

$m = m' + 0.3322 (t - t')$ جب عہ قطعہ سے حاصل ہوگا جہاں اس زوج کے صدر تارے کا صعود مستقیم اور میل عہ ضہ ہیں اور ت اور ت' کو سالوں میں بیان کیا گیا ہے۔

۵۸۔ راس المحل کی حرکت طریق الشمس پر۔

استقبال اور کج کی وجہ سے خط استواء اور طریق الشمس کا نقطہ تقاطع جسے ہم راس المحل (۲) کہتے ہیں طریق الشمس پر (جسے ثابت فرض کر لیا گیا ہے) متحرک ہوتا ہے۔ اس لیے اس کا محل وقت کا ایک تفاعل ہے اور اگر طریق الشمس پر کے کسی ثابت نقطہ و سے ۲ کا فاصلہ ص ہو تو ہم لکھ سکتے ہیں

ص = ل + ب + ت + د جو کسی مستقل آن سے شمار کیا گیا ہے اس مساوات میں ت وہ وقت ہے جو کسی مستقل آن سے شمار کیا گیا ہے اور ل اور ب مستقل ہیں اور د میں صرف دوری رقیب شامل ہیں۔ (۱۸۶)

ان رقموں میں ست کزادیوں کے جملوں میں آتا ہے جو د میں صرف ان کی جنوب اور جنوب الہام کے ذریعہ داخل ہوتے ہیں۔ اس طرح مقداروں ب ت اور د کے درمیان ایک بنیادی فرق ہے چنانچہ اول الذکر مقدار وقت کی نسبت سے غیر محدود اضافے کی قابلیت رکھتی ہے اور ان میں ب دراصل استقبال کا مستقل ہے۔ برخلاف اس کے د کی قیمت حدود کے درمیان مقید ہے چنانچہ وہ کسی خاص مقدار د سے بڑی نہیں ہو سکتی اور نہ د سے کم ہو سکتی ہے جہاں د ایک محدود مقدار ہے۔ مقدار د وہ کب ہے جس میں اس سے صی اُس یکساں طور پر متحرک محل کے گرد ہستارز ہے جو وہ کب کے موجود نہ ہونے کی صورت میں اختیار کرتا۔

فرض کرو کہ ن ایک نقطہ ہے جو طریق الشمس پر یکساں طور پر حرکت کرتا ہے اور نقطہ د سے اس کا فاصلہ وقت ت پر د ب ت سے تعبیر ہوتا ہے۔ ۲ بعض اوقات ن سے آگے ہوگا اور بعض اوقات اس کے پیچھے لیکن فاصلہ ۲ ن ہرگز د سے متجاوز نہیں ہو سکتا۔ ۲ کی حرکت بالوسط وہی ہوگی جو ن کی ہے اور اس لیے ن کو اعتدال ربیع کا اوسط نقطہ سمجھا جاسکتا ہے جو طریق الشمس پر یکساں طور پر حرکت کرتا ہے اور جس کے عین قرب میں اس محل ہمیشہ پایا جاتا ہے۔ چونکہ کسی ستارے کے طول بلد کو طریق الشمس پر ۲ سے پیمائش کرتے ہیں اس لیے یہ ظاہر ہے کہ یہ طول بلد ۲ کی حرکت کی وجہ سے بالعموم بڑھتے رہتا چاہے اگرچہ خود ستارہ ذاتی حرکت سے محروم ہو۔ ہمدرد ٹھونکی عدوی قیمتیں داخل کرنے سے طریق الشمس پر کسی ستارے کے اصلی طول بلد کے لئے حسب ذیل جملہ حاصل ہوتا ہے :-

۱۔ علیہ ہیئت کی ایک کافرٹس نے جو بقیام پیرس باہر مئی ۱۸۹۶ء منعقد ہوئی تھی اس جملہ کے سروں کی مندرجہ قیمتیں اختیار کی گئیں اور اب تک یہ بکری جنٹری میں استعمال کی جاتی ہیں۔

لہ = لہ + ۲۶ + ۵۰ = ۷۶ سال ۲۳۵ + ۱۷۰ = ۴۰۵ سال ۲۷۰ = ۶۷۵ سال

جہاں

لہ، ن کے حوالہ سے شروع سال پر ستارہ کا طول بلد ہے،
تہ سال کی وہ کسر ہے جو زیر بحث وقت تک گزر چکی ہے،
بج چاند کے صعودی عقدہ کا ارض مرکزی طول بلد ہے،
ل سورج کا اوسط طول بلد ہے جو ہمارے موجودہ مقصد کے لیے
کافی صحت کے ساتھ سورج کا اصلی ارض مرکزی طول بلد سمجھا جاسکتا ہے۔
لہ کے اس جملہ میں دوسری رقم استقبال کی وجہ سے ہے۔ یہ رقم
(۱۸۷) ستارے کے طول بلد میں سالانہ اضافہ ۵۰ + ۲۶ کے جواب میں ہے۔ چونکہ
اس رقم میں تہ بطور ایک جزو ضربی کے شامل ہے اس لیے وہ غیر محدود
اضافہ قبول کرنے کی اہلیت رکھتی ہے اور اس لیے وہ لہ کے جملہ کی تین متغیر
رقموں میں سے زیادہ اہم ہو سکتی ہے۔

تیسری رقم میں بج آتا ہے جو چاند کے صعودی عقدہ (طریق الشمس) کا
خیال بلد ہے اس رقم سے اس الجملہ کا طول بلد (۱۷۰ + ۲۳۵) سے (۷۶ + ۲۳۵) سال
تک اپنی اوسط قیمت کے کسی ایک جانب تغیر ہو سکتا ہے۔ چونکہ عقدہ
طریق الشمس کے گرد تقریباً ۱۸ سال میں گردش کر لیتے ہیں اس لیے کہو
اس امر کا باعث ہوتا ہے کہ ۱۷۰ اپنے اوسط مقام سے تقریباً ۹ سال تک
اگے رہتا ہے اور پھر تقریباً ۹ سال تک اپنے اوسط مقام سے پیچھے۔ لہ
کے جملہ کی آخری رقم سورج کی باعث طول بلد میں کہو ہے اسے ل کی قوم
میں بیان کیا گیا ہے جو سورج کا اوسط طول بلد ہے اس رقم کا دور تقریباً

چھ ماہ ہے۔

طول بلد پر اثر رکھنے کے ماسوا کہو طریق الشمس کے میلان پر دوری
اثر بھی رکھتا ہے اس لیے کسی دئے ہوئے وقت پر اصلی میلان معلوم
کرنے کے لیے شروع سال کے اوسط میلان میں ۱۷۰ + ۲۳۵ ج + ۵۵ + ۲۷ ج + ۲۷
کا اضافہ کرنا چاہئے۔ یہاں یہ یاد دلانا ضروری ہے کہ سیاروی استقبال

اس وقفہ میں طول بلد میں استقبال ۲۴۵۸ ہے اور کبو کی رقیس علی الترتیب
 - ۱۷۱ اور ۵۳ ہیں اس لیے جواب ۸۰ ہے۔ اسی طرح میلان
 ۲۳ ۲۷ ۲۶ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۳ - ثنابت کرو کہ آغاز سال ۱۹۰۹ ء سے طول بلد میں استقبال
 بتاریخ ۷ نومبر ۱۹۰۹ ء ۲۲۱۷ ہے اور کبو - ۱۷۳ آئے یہ دیا گیا ہے کہ $۲۲۶۱ =$
 اور $۶۸۷ =$

مثال ۴ - اگر سنہ ۱۹۰۹ میں طریق الشمس کے میلان کی اوسط قیمت
 ۲۳ ۴۷ ۴۰ ہو تو ثنابت کرو کہ بتاریخ ۱۰ جون ۱۹۰۹ ء اس کی ظاہری قیمت
 ۲۳ ۴۷ ۴۰ ہو گی جبکہ $۶۶۶ =$ اور $۷۸۶ =$
 * مثال ۵ - اگر طریق الشمس کے میلان کے کبو مف سہ کو زیادہ
 مکمل جملہ زبحری جنتری ۱۹۱۰ صفحہ ۵

مف سہ = $۹۷۱۰ +$ جم ۹۰ - جم ۲۰۹ + ۱۵۵۱ جم ۲
 - ۱۰۰۹ جم (ل) - ۷۸۶ + ۱۰۲۲ جم (س) + ۷۸۶
 سے محسوب کیا جائے تو ثنابت کرو کہ بتاریخ یکم مئی ۱۹۰۹ ء میلان کا کبو ۱۹۷ آئے
 جبکہ یہ دیا گیا ہو کہ چاند کے صعودی عقدہ کا طول بلد $۷ =$ اور $۸۷ =$
 اوسط طول بلد $۳۸۸ =$
 * مثال ۶ - اگر طول بلد کے کبو مف ل کو زیادہ مکمل جملہ

مف ل = ۱۲۳۵ جب ۷ + ۲۰۹ جب ۲ - ۲۷۰ جب ۲
 + ۱۰۷ جب (ل) + ۲۷۳ - ۷۰۵ جب (س) + ۷۸۶
 سے محسوب کیا جائے تو ثنابت کرو کہ بتاریخ ۲۷ دسمبر ۱۹۰۹ ء اس کی قیمت - ۱۵۳۷
 ہے یہ دیا گیا ہے کہ ۶۶۰۰ اور $۲۷۳۳ =$

* ۵۹ - غیر تابع یومی اعداد - اگر کسی ستارے کی کوئی ذاتی حرکت
 نہ بھی ہو جیسا کہ ہم فی الحال فرض کریں گے تو بھی اس کے محدود استقبال اور کبو
 کی باعث مسلسل بدلتے رہنے چاہئیں۔ اب ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ طریق الشمس

ایک ثابت دائرہ ہے اور اوسط اعتدالی نقطہ طریقی الشمس پر یکساں حرکت کرتا ہے اور اس لیے اس کا اوسط فاصلہ اس محل کے نقطہ سے صفر ہے۔ اور خط استوا و تاء بیچت پر طریقی الشمس کو اوسط اعتدالی نقطہ پر قطع کرتا ہے اور سب تشریح بالا طریقی الشمس کے ساتھ زاویہ

۲۳° ۵۸' ۴۰" - ۲۶۸° (ت - ۱۹۱۰)

کا میلان رکھتا ہے۔

کسی ستارہ کے اوسط صعود و مستقیم اور میل سے اس ستارہ کا وہ صعود و مستقیم درمیل سمجھا جائے گا جو آغاز سال پر اوسط خط استوا کے حوالہ سے لئے گئے ہوں۔ اب ہمارے سامنے یہ مسئلہ ہے کہ کسی خاص دن کسی ستارہ کے ظاہری نیمہ دفعہ و نیمہ کیا ہیں جبکہ اس کے محدود عہ اور ضہ اس سال کے لئے دئے گئے ہوں جس میں یہ دن آتا ہے۔

مطلوبہ مساواتیں دفعہ ۵ کے عام ضابطوں (۶) (۲) (۷) سے حاصل ہوں گی اور موجودہ مقصد کے لیے ک اور سہ سے چھوٹی مقداریں سمجھی جاسکتی ہیں جن کے مربع یا حاصل ضرب نظر انداز کئے جاسکتے ہیں۔ ان حالات کے تحت محوٰلہ بالا مساواتیں مساواتوں

جب ضہ = جب نہ + جب ک جب سہ جم ضہ جم عہ + جب (سہ - سہ) جم ضہ جب عہ جم نہ جم عہ = جم نہ جم عہ - جب ک جب سہ جب نہ - جب ک جم سہ جم ضہ جب عہ جم ضہ جب عہ = جم ضہ جب عہ + جب ک جم سہ جم ضہ جم عہ - جب (سہ - سہ) جب ضہ میں تحویل ہوتی ہیں اور ان سے حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

جم ضہ جب (عہ - عہ) = جب ک (جم سہ جم ضہ + جب سہ جب ضہ جب عہ) - جب (سہ - سہ) جب ضہ جم عہ

۲ جب ۱ (ضہ - ضہ) = جب ک جب سہ جم عہ + جب (سہ - سہ) جب عہ پس اگر عہ - عہ کو وقت کے ثانیوں میں اور ضہ - ضہ اک اور سہ - سہ

کو ثوس کے ثانیوں میں بیان کیا جائے تو

عہ - عہ = $\frac{1}{15}$ ک جم سہ + $\frac{1}{15}$ { ک جب سہ جب عہ - (سہ - سہ) جم عہ { س ضہ (۱) ...
 ضہ - ضہ = ک جب سہ جم عہ + (سہ - سہ) جب عہ
 اب ہم تین نئی مقداریں ف، گ، گ ایسی لیتے ہیں کہ

ف = $\frac{1}{15}$ ک جم سہ، گ جم گ = ک جب سہ، گ جب گ = (سہ - سہ)

(۲)

تو مساواتیں (۱) ہو جاتی ہیں

عہ - عہ = ف + $\frac{1}{15}$ گ جب (گ + عہ) س ضہ (۳)
 ضہ - ضہ = گ جم (گ + عہ)

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ ف، گ، گ ستارہ کے محدودوں پر منحصر نہیں ہیں، وہ صرف سال کے دن پر منحصر ہوتے ہیں اور اس کے ساتھ بدلتے ہیں

ہم ان کو غیر تابع یومی اعداد کہیں گے۔

کسی ستارہ کے محدودوں پر استقبال اور کبوتر کے اثرات محسوب کرتے ہیں
 آسانی پیدا کرنے کے لیے ایفیمرس میں جدولیں دی جاتی ہیں جن میں سال کے
 ہر دن کے جواب میں غیر تابع یومی اعداد کی قیمتیں درج کی ہوئی ہوتی ہیں۔
 ہر سال ایفیمرس میں صحیح ضابطے دئے جاتے ہیں (مثلاً دیکھو کبریٰ جہتری سلسلہ ۹
 صفحہ ۲۳۳) جن سے یومی اعداد ف، گ، گ محسوب کئے جاسکتے ہیں، نیز ان سے
 دیگر یومی اعداد بھی جن کا حوالہ اب تک ہم نے نہیں دیا ہے معلوم ہو سکتے ہیں۔ فی الحال (۱۹)
 جس حد تک ہمیں واسطہ ہے حسب ذیل تقریبی مساواتیں کافی ہوں گی

ف = $\frac{1}{15}$ جم سہ (۵۰۲۶ ت - ۱۲۰۰ جب ج - ۳۰۰۰ جب ل) (۴) ...
 = ۳۰۰۰۰۰ (ت - ۵۰۲۶) جب ج - ۳۰۰۰۰۰ جب ل
 گ جم گ = جب سہ (۵۰۲۶ ت - ۱۲۰۰ جب ج - ۳۰۰۰ جب ل)
 = ۱۰۰۰۰۰ (ت - ۵۰۲۶) جب ج - ۳۰۰۰۰۰ جب ل
 گ جب گ = ۹۵۲ جم ج - ۵۶ جم ل

ان مساواتوں میں L سورج کا اوسط طول بلد ہے اور j خط استوا پر چاند کے صعودی عقدہ کا طول بلد ہے (دیکھو صفحہ ۲۸۷)۔
وقت t سال کا وہ کسری حصہ ہے جو آغاز سال سے زیر بحث وقت گزر چکا ہے۔

صعود مستقیم اور میل کے سالانہ استقبال کو راست ضابطوں (۳) کی مدد سے فگ کی بجائے وہ قیمتیں درج کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے جو ضابطوں (۴) سے حاصل ہوتی ہیں اگر ہم ان رقموں کو خارج کر دیں جو کب کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں۔ چنانچہ (۳) میں F کی بجائے ۳۶۰.۷۳ ، t کی بجائے ۲۰۱۰.۵ اور g کی بجائے صفر درج کرتے ہیں اور اس طرح ستارہ ϵ ضہ کے لیے ہمیں معلوم ہوتا ہے (حسب مثال دفعہ ۵) کہ

صعود مستقیم میں ایک سال کا استقبال ϵ کو
 $\epsilon + ۳۶۰.۷۳$ جب ϵ ضہ
 میں تبدیل کرتا ہے
 میل میں ایک سال کا استقبال ϵ کو
 $\epsilon + ۲۰۱۰.۵$ جب ϵ
 میں تبدیل کرتا ہے

اب ہم استقبال اور کب کے عام مسئلہ کو حل کر سکتے ہیں یہ مسئلہ حسب ذیل ہے
 اگر سال t کے آغاز پر ایک ستارہ کا صعود مستقیم اور میل

۵۔ یاد رہے کہ جب زیادہ سے زیادہ صحت مطلوب ہوتی ہے تو سال کی ابتداء اُس لمحہ پر لیتے ہیں جبکہ سورج کا اوسط طول بلد ٹھیک ۲۸۰ ہو۔ سال ۱۹۷۷ء میں یہ طول بلد یک جنوری کی صبح کے ۵ بجے پر یعنی جنوری ۱۹۷۷ء پر ہے۔ ۱۹۷۷ء اور ۱۹۷۸ء کے درمیان ہر استوائی سال کی ابتداء کے گریجویٹ اوسط وقت کو معلوم کر نیکی لیے نیو کومب کی اسفیریکل اسٹراٹوجی کا ضمیمہ صفحہ ۲۰۲ دیکھو جہاں اور دو سری کارآمد جدولیں بھی دی گئی ہیں۔

عہ، ضمہ دے گئے ہوں تو سال (ت) کے کسی دن اسی ستارہ کا ظاہری صعود مستقیم اور میل عہ، ضمہ معلوم کرو جہاں تک کہ استقبال اور کیو کا تعلق ہے۔

پہلے اس ستارہ کے وہ محد و معلوم کرنے چاہئیں جو سال (ت) میں یکم جنوری کو اوسط خط استواء کے حوالے سے تھے۔ یہ محد دے ہوئے اوسط صعود مستقیم اور میل میں حسب ذیل استقبالات جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں :-

صعود مستقیم میں استقبال (۳۰.۷۳ + ۳۳۶ + ۳۳۶) جب عہس ضمہ (ت) - (ت) (۱۹۱) میل میں استقبال (۲۰.۱۰۵) جم عہ (ت) - (ت) اس طرح سال (ت) میں بتاریخ یکم جنوری اوسط مقام معلوم کر نیکی بعد اس سال کی ایفرس سے ف، گ، گ کی قیمتیں اس مخصوص دن کے کے لیے جس کے لیے عہ، ضمہ مطلوب ہیں معلوم کی جاتی ہیں اور ضابطوں (۳) کو استعمال کیا جاتا ہے تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{عہ} = \text{عہ} + (۳۰.۷۳ + ۳۳۶ + ۳۳۶) \text{ جب عہس ضمہ (ت) - (ت) (ت)}$$

$$+ \text{ف} + \frac{۱}{۱۵} \text{ جب (گ) + (عہ) مس ضمہ (۴)}$$

$$\text{ضمہ} = \text{ضمہ} + ۲۰.۱۰۵ \text{ جم عہ (ت) - (ت) + (گ) جم (گ) + (عہ)}$$

ان ضابطوں کے اطلاق کی مثال حسب ذیل ہے۔ فرض کرو کہ گرنیوچ پر جوزا (بہ) (Gemini) کا ظاہری صعود مستقیم اور میل بتاریخ، نومبر ۱۹۱۷ء بوقت اوسط نیم شب محسوب کرنا مطلوب ہے جہاں تک کہ استقبال اور کیو کا تعلق ہے۔ گرنیوچ کے دوسرے دس سالہ کیٹلاگ سے جس میں ۶۸۹۲ ستاروں کے حوالے دیے گئے

۱۔ دیکھو بوری جنٹری ماہیت ۱۹۱۷ء جس میں ضلالت اور ذاتی حرکت کے لیے بھی تصحیحات درج ہیں۔ نیز دیکھو گیارہواں باب دفعہ ۹۱۔

یہ معلوم ہوتا ہے کہ سنہ ۱۸۹۹ء میں جوزا (بہ) کا اوسط مقام حسب ذیل ہے:

$$\text{عہ} = ۳۵۱.۶۳۸^{\circ} \text{ ش} \text{ ضہ} = ۲۸^{\circ} ۱۷' ۲۸.۵''$$

ان قیمتوں کو $۳۵۱.۷۳۶^{\circ} + ۳۵۰.۷۳۶^{\circ}$ جب عہ مس ضہ میں درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ سالانہ استقبال ۳۵۷.۷۳۶° ہے، پس چونکہ اس صورت میں ت۔ ت۔ بیس سال ہے اس لیے صعود مستقیم میں استقبال سنہ ۱۸۹۹ء کے اوسط مقام سے سنہ ۱۹۰۰ء کے اوسط مقام تک ۱۵۴.۷۳۶° ہے۔ اسی طرح میل میں سالانہ استقبال ۲۰۱.۰۵° جم عہ (= ۸۱.۳°) ہے اور اس لیے ۲۰ سال میں اس کی مقدار (۴۰۲۰.۵°) ہوتی ہے۔ اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ سنہ ۱۹۱۹ء میں جوزا (بہ) کا اوسط مقام حسب ذیل ہے

$$\text{عہ} = ۳۵۹.۶۳۹^{\circ} \text{ ش} \text{ ضہ} = ۲۸^{\circ} ۱۷' ۲۸.۵''$$

اب ہمیں وہ تصحیحات عمل میں لانی چاہئیں جن سے اس کا ظاہری مقام بتاریخ ۱۷ نومبر سنہ ۱۹۱۹ء حاصل ہوتا ہے۔ اس دن کے لیے بحری جہتی صفحہ ۲۵۰ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف} = ۱۷۷.۵^{\circ} \text{ لوک گ} = ۱۷۱.۰۹۹^{\circ} \text{ گ} = ۳۳۲.۰^{\circ}$$

قوس میں عہ کا معادل $۱۱۴^{\circ} ۵۷'$ ہے اس لیے گ + عہ = ۱۷۷.۵°

اور اس لیے $\frac{۱}{۱۵}$ گ جب (گ + عہ) اس ضہ = ۱۷۶° ش، پس عہ کی تصحیح ہے $۱۷۷.۵^{\circ} +$

۱۷۶° ش = ۲۵۳.۱° میل ضہ کے لیے تصحیح ہے گ جم (گ + عہ) = ۱۷۷.۵° ۔

بالآخر بتاریخ ۱۷ نومبر سنہ ۱۹۱۹ء ستارہ کا مظلومہ ظاہری مقام ہے

$$\text{عہ} = ۳۵۹.۶۳۹^{\circ} \text{ ش} \text{ ضہ} = ۲۸^{\circ} ۱۷' ۲۸.۵''$$

اگر وقت ت = پر خط استوا پر کے ایک ستارہ کا صعود مستقیم اوسط

اعتدال کے حوالہ سے غیب ہو تو اس ستارہ کا اصلی صعود مستقیم وقت (جیکہ
ت کو سالوں میں بیان کیا جائے) پر جہاں تک کہ ۲ کی حرکت کا تعلق ہے
حسب ذیل ہوگا :-

عہ = عہد + ۳۰۰۰۳ ش ت - ۱۰۶ ش جب ج - ۰۰۸ ش جب ل

اس ضابطہ میں ۳۰۰۰۳ وہ سالانہ تبدیلی ہے جو صعود مستقیم میں
استقبال کی باعث واقع ہوتی ہے اور پہلی دور میں وقت ت پر اوسط
صعود مستقیم کو تعبیر کرتی ہیں۔ آخری دور میں کبوتر کی وجہ سے ہیں۔ پس ہم
دیکھتے ہیں کہ کسی استوائی ستارہ کے صعود مستقیم کے تغیرات اپنی اوسط
قیمت سے حدود + ۱۶۱۲ ش اور - ۱۶۱۲ ش کے درمیان رہتے ہیں۔ جہاں تک
کبوتر کی خاص رقم کا تعلق ہے ممکنہ تبدیلیوں کا ایک مکمل دور ۸ سال میں
پورا ہوتا ہے، جیسا کہ قبل ان میں بیان کیا جا چکا ہے۔ یہ وہ مدت ہے
جس میں ج 'بقدر ۲۶۰ زاویہ کے بڑھتا ہے۔

فرض کرو کہ چاند کے عقدہ کے طول بلد میں اور سورج کے اوسط
طول بلد میں یومی تبدیلیاں علی الترتیب مف ج اور مف ل ہیں تو لا
میں یومی تبدیلی کبوتر کی وجہ سے حسب ذیل ہوگی

- ۱۰۶ ش جم ج مف ج - ۱۲ ش جم ل مف ل

مف ج اور مف ل کی قیمتیں نیم قطری زاویوں میں تقریباً - ۰۰۰۹۲۰ اور
۰۰۱۰۱۰ ہیں اور اس لیے ۲ میں یومی تبدیلی قریب قریب

۰۰۱ ش جم ج - ۰۰۳ ش جم ل

کے مساوی ہے۔ اس جملہ کو حدود - ۰۰۲ ش اور + ۰۰۳ ش کے درمیان
واقع ہونا چاہئے اور اس لیے کسی کو کبوتر یوم اور اوسط کو کبوتر یوم کے درمیان
فرق ۰۰۲ ش سے متجاوز نہیں ہو سکتا اور نہ - ۰۰۳ ش سے گھٹ سکتا ہے۔

ہم نے دفعہ ۲۳ میں کوکبی یوم کی تعریف اُس وقفہ سے کی ہے جو ۲ کے دو متواز مَرُوروں کے درمیان ہوتا ہے۔ اب یہ معلوم ہوتا ہے کہ تمام کوکبی یوم ٹھیک ٹھیک مساوی نہیں ہوتے کیونکہ ۲ کی حرکت بالکل یکساں نہیں ہے۔ اس لیے یہ خیال ہو سکتا ہے کہ اوسط کوکبی یوم اور ظاہری کوکبی یوم میں ۲ جو ۲ کے دو مَرُوروں کے درمیان ہوتا ہے اور اس لیے کسی قدر متغیر ہے، امتیاز کرنا چاہئے۔ اس کے ساتھ ہی ہمیں اُس امتیاز کا خیال آتا ہے جو ظاہری شمسی یوم اور اوسط شمسی یوم کے درمیان ہے لیکن فی الحقیقت ان دو صورتوں میں کوئی مماثلت نہیں ہے۔ ایک ہی سال میں دو ظاہری شمسی دنوں کا درمیانی فرق دو کوکبی دنوں کے بڑے سے بڑے درمیانی فرق کا کئی ہزار گنا ہو سکتا ہے (دیکھو صفحہ ۳۳۲)۔

اگر ہمارے پاس ایک نظری طور پر مکمل گھڑی ہو جو بغیر کسی تصحیح کے ۱۸ ۱/۲ سال تک ایسا ٹھیک وقت دے کہ ہر اوسط کوکبی یوم کے ختم پر اس کی سوئیاں بگ بگ ۲۴ گھنٹے بتلائیں تو ۲ ۱/۲ سال تک روزانہ مختلف اوقات پر جو ۲۳ گ ۵۹ ۸۶ ۵۸ گ ۵۸ ۱۳ گ کے درمیان

(۱۹۳)

واقع ہوں گے مَرُور کرے گا۔ لیکن ایسی کوئی کاہل گھڑی موجود نہیں ہے اور بہترین گھڑیاں جو موجود ہیں ان میں اکثر مشاہدات کے مقابلہ سے تصحیح کرنی پڑتی ہے، وہ غلطیاں جو ایک تصحیح اور دوسری تصحیح کے درمیان پیدا ہوتی ہیں اور ۲ کی بے قاعدگیوں کی وجہ سے ہیں نظر انداز کی جاتی ہیں کیونکہ وہ خطا کے دیگر ماخذوں کے مقابلہ میں ناقابلِ قدر ہیں۔ اس لیے ہم کوکبی یوم کی تعریف یہ کرتے ہیں کہ اس کا آغاز اصل راس الحمل کے مَرُور سے ہوتا ہے۔

کوکبی وقت کی پیمائش پر ۲ کی حرکت کے اثر کی حقیقی حد کی وضاحت کے لیے ہم ۱۰ جون اور ۲۰ جون ۱۹۵۹ء کی صورت لیں گے۔ پہلی تاریخ کے لیے الفیئرس سے کبھو - ۵۰۵ گ اور دوسری تاریخ کے لیے - ۵۰۲ گ

حاصل ہوتا ہے۔ خطا کے دیگر ذریعوں کو نظر انداز کرنے سے کبوتر کے تغیر کی شرح اوسطاً ۰.۳ تا ۱ فی یوم کے مائل ہے۔ اب یہ ظاہر ہے کہ استفادہ چھوٹی مقدار بمقابلہ ان بڑی تبدیلیوں کے جو گھڑی کی شرح میں اسکے ٹی پیرزوں کے نقائص یا آب و ہوا کے اثرات سے پیدا ہوتے ہیں قابل انتفا نہ ہو سکے گی۔ نیز ۲ کی بے قاعدگی سے جو خطا پیدا ہوتی ہے وہ وقت کے ساتھ ساتھ جمع نہیں ہوتی کیونکہ ۱۸ اکتوبر کو کبوتر پھر ۰.۵ ادا ہو جاتا ہے اور اس لیے ۱۰ جون سے ۱۸ اکتوبر تک اس سبب سے گھڑی کی شرح کی اوسط ظاہری تبدیلی صفر ہوگی۔

پس گھڑی کی خطا کو اکثر متعین کرتے رہنے سے نہ صرف وہ چھوٹی بے قاعدگیاں دور ہونگی جو گھڑی جیسی مشین میں ناگزیر ہیں خواہ وہ کتنی ہی احتیاط سے بنائی جائے بلکہ ساتھ ہی ہم یہ مان سکیں گے کہ تصحیح کے بعد جو کبوتری وقت گھڑی سے معلوم ہوتا ہے وہ پوری ضروری صحت کے ساتھ اس محل کا ساعتی زاویہ ہے۔

ایک ستارہ کے مقام پر استقبال اور کبوتر کے اثرات کی تحقیق ذیل دوسرے طریقہ سے کرنا مفید ہوگا۔

چونکہ ستارہ کا طول بلد اس محل سے ناپا جاتا ہے اس لیے خط استوا کی استقبالی حرکت ستارہ کے طول بلد کو تبدیل کرے گی لیکن اس کا عرض بلد غیر متغیر رہے گا۔ مثلاً اگر ستارہ کا طول بلد کسی وقت یہ لہ ہو اور اگر اس محل اس طرح حرکت کرے کہ ستارہ کا طول بلد ۱۰ میل لہ ہو جائے اور ساتھ ہی میلان ۳۰° سے ۴۰° مف سے ہو جائے تو مساواتوں کے حسب ذیل دونظامات حاصل ہوتے ہیں۔ ان میں مساواتوں (۱) (۲) (۳) سے عہ اور ضہ کی قیمتیں پہلی آن کے لیے حاصل ہوتی ہیں اور پھر مساواتوں (۴) (۵) (۶) سے مف عہ اور مف ضہ ملتے ہیں جو زیر بحث وقفہ میں استقبال کی وجہ سے ان محدودوں کی تبدیلیاں ہیں۔
جم ضہ جب عہ = جب لہ جم بہ جم سہ۔ جب بہ جب سہ (۱)

جم ضد جم عد = جم لہ جم بہ (۲)
جب ضد = جب لہ جم بہ جب سہ + جب بہ جم سہ (۳)

اور

جم (ضد + مف ضد) جب (عد + مف، عد) = جب (لہ + مف لہ) جم بہ جم (سہ + مف سہ)
- جب بہ جب (سہ + مف سہ) (۴)
جم (ضد + مف ضد) جم (عد + مف، عد) = جم (لہ + مف لہ) جم بہ (۵)
جب (ضد + مف ضد) = جب (لہ + مف لہ) جم بہ جب (سہ + مف سہ)
+ جب بہ جم (سہ + مف سہ) (۶)

ان مساواتوں سے مف عد اور مف ضد معلوم ہوتے ہیں جبکہ مف لہ اور مف سہ دئے گئے ہوں اور اصل عام ترین صورت میں بغیر کسی اہام کے حاصل ہوتا ہے۔ لیکن علم ہیئت میں وہ صورت جو سب سے زیادہ عام طور پر مستعمل ہے اس میں یہ چار مقادیر مف لہ، مف سہ، مف عد، مف ضد سب کی سب چھوٹی مقادیر ہیں اور ہم راست حسب ذیل طریقہ پر عمل جاری رکھتے ہیں:

(۲) کو تفرق کرنے اور جم ضد سے تقسیم کرنے (کیونکہ ضد = ۹۰ کی صورت پر غور کرنے کی ضرورت نہیں ہے) سے اور مختصر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

مف ضد = جم عد جب سہ مف لہ + جب عد مف سہ

نیز (۱) کو تفرق کرنے اور جم ضد سے تقسیم کرنے سے

جم عد مف عد - مس ضد جب عد مف ضد = جم عد جم سہ مف لہ - مس ضد مف سہ
اس طرح حسب ذیل نتیجے حاصل ہوتے ہیں جن سے صعود مستقیم اور میل پر استقبال کے اثرات اکثر مقاصد کے لیے کافی صحت کے ساتھ محسوب کئے جاسکتے ہیں۔

اگر اس محل کا محل طریق الشمس پر اس طرح ہٹے کہ سب طول بلد بقدر چھوٹی مقدار مف لہ کے بڑھ جائیں اور اگر میلان سہ میں بقدر چھوٹی

زاویہ مف سہ کے اضافہ ہو تو کسی ستارہ کے صعود مستقیم اور میل میں تناسل
تبدیلیاں مف عہ اور مف ضد، مساواتوں
مف عہ = (جم سہ + جب عہ مس ضد جب سہ) مف لہ - مس ضد جم عہ مف سہ
مف ضد = جم عہ جب سہ مف لہ + جب عہ مف سہ
سے ملیں گی۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ کسی دئے ہوئے دن میں جن ستاروں کے میل
استقبال کی وجہ سے بڑھ جاتے ہیں اور جن کے میل استقبال کی وجہ سے گھٹ جاتے
ہیں ان دونوں کے درمیان خط فاصل ایک بڑا دائرہ ہے جس پر کے ستارے
اُس دن میل میں کوئی استقبال نہیں رکھتے۔

کیونکہ اگر جم (گ + عہ) =۔ تو وہ سب ستارے جن کا صعود مستقیم
۹۔ گ یا ۲۰۔ گ۔ ہے میل میں استقبال کی وجہ سے نہیں بدلتے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ غیر تابع یومی اعداد سے کس طرح طریق الشمس کا
میلان آسانی کے ساتھ محسوب کیا جاسکتا ہے۔

دفعہ ۵۹ کی مساوات کی رو سے گ جب گ =۔ (سہ - سہ) اور
اس لیے سہ = سہ - گ جب گ

مثلاً بتاریخ ۲ مارچ سنہ ۱۹۱۰ء بھری جنتری صفحہ ۲۴۵ سے یہ حاصل ہوتا
ہے کہ لوک گ = ۲۳۲ ۰۶ اور گ = ۲۴۳ ۰۴۹، اس لیے گ جب گ
= ۲۴۳ ۰۶ - ۲۳۲ ۰۶ = ۱۱ ۰۰ (بھری جنتری صفحہ ۱)
۲۳ ۰۶ ۵۸ ۳۵ ہے اس لیے میلان جبکہ اس کی تصحیح کبوتر کے لیے کی جائے
۲۳ ۰۶ ۳۲ ۸۶ ہے۔ نیز چونکہ اوسط میلان یکساں طور پر سالانہ ۰ ۶۸ ۶۸
کی شرح سے گھٹتا ہے اس لیے اس میلان میں سے ۰ ۸ ۰۶ گھٹانا چاہئے
تاکہ ۲ مارچ سنہ ۱۹۱۰ء کو ظاہری میلان حاصل ہو جائے چنانچہ یہ میلان
۲۳ ۰۶ ۲۴ ۸۶ ہے۔ (دیکھو بھری جنتری صفحہ ۲۱۷)۔

مثال ۳۔ سال کے آغاز پر اوسط اعتدالی نقطہ ۲ ہے۔ بتاؤ کہ
۲ کے لحاظ سے طریق الشمس پر ظاہری اعتدالی نقطہ کا محل ۲ کس طرح محسوب

کیا جاسکتا ہے۔

۲۲ مقدار ک ہے جو دفعہ ۵۹ مساواتوں (۲) کی رو سے
(۲۲۵ ف + ۲ گ + ۲ جم گ) کے مساوی ہے۔ مثلاً بتاریخ ۲۵ دسمبر ۱۹۱۰ء
(نیم شب) ف = ۲۳۴۴ کوک گ = ۱۵۲۰۱۸ اور

گ = ۳۳۸ = ۴۴ (بحری جنتری صفحہ ۲۵۱) اس لیے ک = ۳۴۶۲۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ دُب اصغر (ص) کے صعود مستقیم میں
سالانہ استقبال = ۶۵۳۰ ہے یہ دیا گیا ہے کہ عہ = ۱۶ ۱۲ ۵۶ ش اور ضہ =
۱۲ ۹۲ (۱۹۰۰)۔

مثال ۵۔ اس امر کی تشریح کرو کہ ایک مساوی گولے کی مدد سے
کس طرح یہ معلوم کیا جاسکتا ہے کہ تاروں کے جو مجموعے ۲۰۰۰ سال قبل کیمبرج
کے عرض بلد میں نظر آتے تھے وہ اب وہاں نظر نہیں آتے۔ نیز یہ بتاؤ کہ آسمان
کے کس حصہ میں وہ واقع ہیں۔

۶۰۔ ستاروں کی ذاتی حرکتیں۔ ہم دیکھ آئے ہیں کہ کسی

ستارے کے صعود مستقیم اور میل میں تبدیلیوں کی ایک وجہ یہ ہے کہ ان
بڑے دائروں میں تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں جن کے حوالہ سے ستارہ
کے یہ محدود لیے جاتے ہیں۔ ان تبدیلیوں کے علاوہ بہت سے ستاروں
کی صورت میں مقام کی حقیقی تبدیلیاں ہیں جو خود ستاروں کی اصلی حرکتوں
نی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں ان تبدیلیوں کو ہم ذاتی حرکتیں کہیں گے۔
وہ ستارہ جو شمالی نیم کرہ میں اس قسم کی بڑی سے بڑی معلومہ حرکت رکھتا
ہے برج کلاب (Aldebaran) میں مقدار ۶۵ کا ایک چھوٹا
ستارہ ہے۔ گروم برج (Groombridge) کے کیٹلاگ میں
اس ستارہ کا عدد ۱۸۳۰ ہے اور اس کے محدود منہ ۹ کے لیے یہ ہیں

$$عہ = ۱۱ ۴۶۵۲ ۴۶ ضہ = ۳۸ + ۲۶$$

یہ ستارہ سالانہ ۷ کی ایک قوس پر حرکت کر لیتا ہے اور چونکہ اس کا فاصلہ بھی معلوم ہے اس لیے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اس کی رفتار ۵۰ میل فی ثانیہ سے کم نہیں ہوتی چاہئے۔ اس ستارہ کی حرکت سے بڑی حرکت رکھنے والا ایک چھوٹا ستارہ (مقدار ۸.۵) جنوبی نیم کرہ میں ہے اور اسکی ذاتی حرکت سالانہ ۷.۸ ہے جس کو کپٹین اور انسن (Kapteyn, Innes) نے معلوم کیا تھا۔ اس ستارہ کے محدود ہیں

$$۷.۸ = ۵.۷۵ \text{ 'ضہ} = ۳.۲۵$$

(۱۹۶)

چمکدار تاروں میں بڑی سے بڑی ذاتی حرکت تھنوس (۱۹۶)

{ ۱۳ = ۸.۳۲ م، ضہ = ۶۰.۲۵ (سنہ ۱۹۰۰ء) } کی ہے جس کی مقدار سالانہ ۳.۷ ہے اور اس کی سمت ایسی ہے کہ صعود مستقیم میں ۴۹.۷۲ کی اور میل میں ۷.۵ کی سالانہ تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔ اسماک راج (Arcturus) { ۱۳ = ۱۱.۱۱ م، ضہ = ۱۹.۴۲ (سنہ ۱۹۰۰ء) } سالانہ

۳.۷ کی ذاتی حرکت رکھتا ہے جو ۲۵ میل فی ثانیہ کی رفتار کے متناظر ہے اور اس ذاتی حرکت کا سالانہ اثر صعود مستقیم پر ۰.۸۷ اور میل پر ۲.۶۰ ہے۔ ایفیمرس میں سالانہ کے لیے ستاروں کے ظاہری مقامات دینے میں ذاتی حرکت کا لحاظ رکھا جاتا ہے اگر وہ قابل قدر ہو۔

یہ ذاتی حرکتیں جن کا اوپر ذکر کیا گیا ہے وہ ہیں جو کہ مساوی پر ستارہ کے محدودوں کو متاثر کرتی ہیں۔ لیکن اگر کوئی ستارہ خط نظر میں حرکت کر رہا ہو تو اس حرکت سے اس کے کردی محدود نہیں بدلتے اور ایسی حرکت کا وجود صرف طیف پیمائی مشاہدات سے ہی معلوم کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً گروم برج ۸۳ کے متعلق یہ معلوم ہوا ہے کہ وہ ہمارے نظام شمسی کی طرف ۵۹ میل فی ثانیہ کی شرح سے آ رہا ہے۔ قبل ازیں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اس ستارہ کی

ماسی رفتار ۱۵۰ میل فی ثانیہ ہے اس لیے فضاء میں سورج کے لحاظ سے اس کی کل رفتار تقریباً ۱۶۰ میل فی ثانیہ معلوم ہوتی ہے۔

۶۱۔ ارضی عرض بلدوں میں تغیرات۔ کوٹنر (Kustner)

نے معلوم کیا کہ وہ محور جس کے گرد زمین گھومتی ہے بلحاظ زمین کے ایک چھوٹی حرکت رکھتا ہے۔ زمین کے محور میں ایسی تبدیلی کا یہ اثر ہوتا ہے کہ ارضی قطبوں کے محل بدل جاتے ہیں اور اس لیے ارضی خط استواء کا محل بدل جاتا ہے۔ اس لیے زمین کی سطح پر کے کسی نقطہ کے عرض بلد میں تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں جو اس نقطہ کی واقعی حرکت کی وجہ سے نہیں ہیں بلکہ اس قاعدہ میں تبدیلیوں کی وجہ سے ہیں جس سے عرض بلد ناپے جاتے ہیں۔ اس مسئلہ کی سب سے

پہلی باقاعدہ تحقیق چیاٹلر (Chandler) نے ۱۸۹۱ء میں کی اس سے یہ بتایا کہ عرض بلد میں مشاہدہ شدہ تبدیلیاں اس مفروض کے ذریعہ بظاہر سمجھائی جاسکتی ہیں کہ زمین کا قطب تقریباً چودہ ماہ کے وقفہ میں تیس فٹ کے نصف قطر کا ایک دائرہ مرسوم کرتا ہے۔ خود چیاٹلر اور دیگر علماء ہیئت کی بعد کی تحقیقاتوں نے یہ ثابت کیا کہ گویہ عام واقعہ صحیح ہے کہ قطب متحرک ہے لیکن اس کی حرکت کی نوعیت اس قدر سادہ نہیں ہے جیسے کہ پہلے فرض کیا جاتی تھی۔ ہم یہاں وہ نقشہ (شکل ۶۱) نقل کرتے ہیں جو پروفیسر البرشت (Albrecht) نے انٹرنیشنل جیوڈیٹک ایسوسی ایشن

(Int. Geodetic Association) کے کام کے مشہور نتیجہ کے طور پر

”Astronomische Nachrichten“ میں دیا ہے۔ اس روئداد کا حوالہ

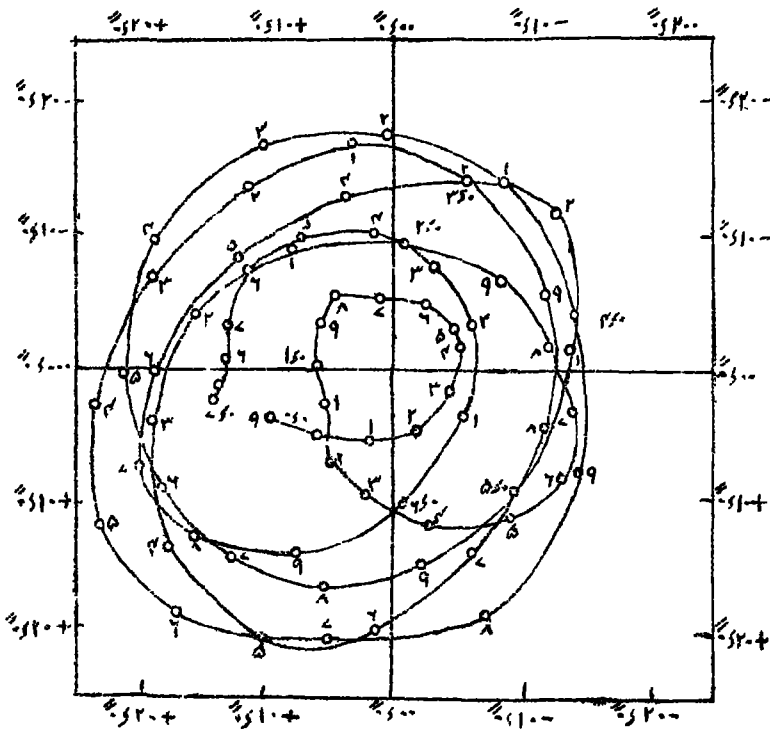
بھی دیا جاسکتا ہے جو سٹرٹنی ڈی ٹاؤنلی (Sidney Townley) نے

(The Publications of the Astronomical Society of the Pacific)

کی جلد ۱۹ صفحہ ۱۵۲ میں دی ہے۔

اس نقشہ میں شکل کے مرکز پر کا مبداء زمین میں شمالی قطب کا وسط محل ہے اور منحنیوں پر نشان کئے ہوئے نقطوں سے متناظر تاریخوں پر

قطب کے حقیقی محل معلوم ہوتے ہیں۔ مثلاً مرکز سے جو قریب ترین منحنی ہے اُس سے قطب کی حرکت ۱۸۹۹۹۹ء سے ۱۹۰۱۱۰ء تک معلوم ہوتی ہے اور پھر اس سے آگے کی ترسیم اس کے مختلف لفیفوں میں ۱۹۰۱۱۰ء تک معلوم کیجا سکتی ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ قطب کے محل ایک مربع کے اندر شامل ہیں جس کا ہر ضلع زمین کے مرکز پر تقریباً ۵۰ کا زاویہ بناتا ہے۔ پس قطب کی حرکتیں ان چھ سالوں میں ایک مربع کے اندر رہتی ہیں جس کے ضلع ۵۰ فٹ سے بڑے نہیں ہیں۔ انفرادی محل بڑی حد تک مشتبہ ہیں۔



شکل (۶۱)

آٹھویں باب پر مثالیں

(۱۹۸)

مثال ۱۔ یہ تسلیم کر کے کہ استقبال کا مستقل $۵۰۰۲۲۵۳ + ۵۰۰۲۲۵۳$ ت ہے جہاں ت سالوں میں سن ۱۸۵۷ سے وقفہ ہے سالوں کی وہ تعداد معلوم کرو جو ۷ کے طریق الشمس کا مکمل دور کرنے سے قبل گزرنی چاہئے۔
مکمل کرنے سے ت سال میں ۷ کی حرکت معلوم ہوتی ہے اور اگر لا وہ عدد جو جس کی تلاش ہے تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۱۲۹۶۰۰۰ = لا ۵۰۰۲۲۵۳ + لا ۵۰۰۱۱۱۲۵$$

اس دو درجہ کی دو اصلوں میں سے ایک منفی ہے اور اس لیے ناقابل قبول
دوسری اصل ۲۳۴۶۸ ہے یا تقریباً ۲۳۵۰۰۔
*** مثال ۲۔** ثابت کرو کہ کرہ سماوی پر کے وہ نقطے جہاں استقبال اور کب کی وجہ سے صعود مستقیم میں تصحیح کسی دئے ہوئے دن میں صفر ہے مخروط

$$\sin(\lambda + \mu) + \frac{1}{15} \text{ گ ی (لا جب گ + ما جم گ)} = ۰$$

پرو واقع ہوتے ہیں جہاں مبدا سورج کے مرکز پر ہے اور محاذ + لا + ما + ع
علی الترتیب ان نقطوں میں سے گزرتے ہیں جن کے صعود مستقیم اور میل
(۰، ۰)، (۰، ۹۰)، (۹۰، ۰)، (۹۰، ۹۰) ہیں اور جہاں ف 'گ' گ زیر بحث دن
کے لیے غیر تابع یومی اعداد ہیں۔ اگر کب کو ترک کر دیا جائے تو دفعہ ۵ کی
مثال ۲ اخذ کرو۔

مثال ۳۔ کب کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ ستارہ (ع، ض) کی
نصف النہار تک دو متواتر اہسیوں کے درمیان وقفہ کو کب یومی سے بعد
۳۶۶ ۵۰۰ بٹ جب ع س ض کے متجاوز ہوگا جہاں کو کب یومی وہ وقفہ ہے جو

جہاں ق شمالی قطب ہے اور ب وہ نقطہ ہے جس کے محدودہ = ۹۰° فہ۔
ہیں۔

وہ نقطہ جہاں سال کے آغاز میں ۲ واقع تھا تاریخ ت کے استواء کے لحاظ سے محدودہ = ۱۵° ف، فہ = ۹۰° جم گ رکھتا ہے جہاں ف وقت کے تانیوں میں بیان کیا گیا ہے۔ اسی طرح نقطہ ب سال کے آغاز میں تاریخ ت کے استواء کے لحاظ سے محدودہ = ۹۰° + ۱۵° ف، فہ = ۹۰° جم گ رکھتا ہے۔ علم ہندسہ سے یہ واضح ہے کہ شطیوں ۲، ب، ق کے گرد گردشیں گ جب گ، گ جم گ اور ۱۵° ف، زیر بحث دو نقطوں کو آغاز سال کے استواء سے تاریخ ت کے استواء تک بجائیں گی۔

مثال ۷۔ ہندسی طور پر ثابت کرو کہ ستاروں کے صعود و مستقیم اور میل پر وقفہ ت میں استقبال اور کبوتر کا اثر اس اثر کے مائل ہے جو کہ سماوی کو (وہ کرہ سماوی جس میں ستارے ہیں لیکن حوالہ کے دائرے نہیں) ایک قطر کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتا ہے جو اس نقطہ میں سے گذرتا ہے جس کا طول بلد مصر ہے اور عرض بلد

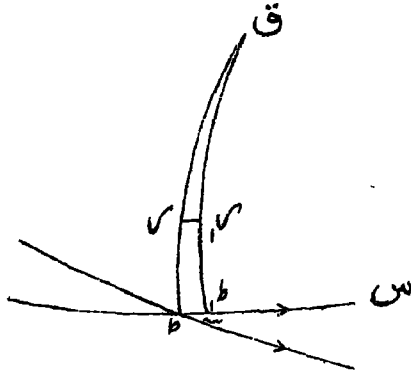
$$\text{مس} = \frac{(\text{ات} + \text{مفل})}{\text{مف}} \quad (۱)$$

ہے۔ گردش کا زاویہ

$$\left\{ (\text{ات} + \text{مفل}) + (\text{مف} \text{ سے } ۹۰^\circ) \right\}$$

ہے اور اس کی سمت رجبی ہے جہاں ۱ استقبال کا مستقل ہے اور مف ل، مف سے علی الترتیب طول بلد میں اور طریق الشمس کے میلان میں کبوتریں۔ طول بلد میں استقبال اور کبوتر کا اثر کہ سماوی کو طریق الشمس کے قطب ق کے گرد زاویہ ۱ + مف ل = ط ق ط (شکل ۶۲) میں سے گزرنے سے پیدا کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح ق ط پر کا کوئی نقطہ س، ق ط پر کے نقطہ س پر منتقل ہوتا ہے۔ اس گردش کی سمت اس لازمی نتیجہ سے متعین

ہوتی ہے کہ وہ ہر نقطہ کے طول بلد کو بڑھانی چاہئے۔



شکل (۶۲)

(۲۰۰) اُس تبدیلی کو پیدا کرنے کے لیے جو کو مَف سہ کی وجہ سے سہ میں واقع ہوئی ہے کرہ سماوی کو ط کے گرد گھمانا چاہئے۔ زاویہ مَف سہ میں سے خط استواء کی حرکت اُس زاویہ کو بڑھا دیتی ہے جو طریق الشمس ط میں اور خط استواء کے درمیان ہے لیکن طریق الشمس ثابت رہتا ہے۔ یہ اثر وہی ہوگا گویا سب نقطوں کو ط کے گرد خلاص سمت ساعت گردش مَف سہ دی گئی ہے۔ ق ط پر کا ہر نقطہ بائیں جانب حرکت کرے گا اور کوئی خاص نقطہ سہ ایسا ہوگا جو اپنے ابتدائی مقام سہ پر واپس آئے گا۔ پس جہاں تک اس نقطہ کا تعلق ہے یہ دو گردشیں ایک دوسرے کی تبدیل کرتی ہیں۔ اس لیے ط اور ق کے گرد یہ دو گردشیں س کے گرد ایک گردش میں ترکیب پاتی ہیں۔

اگر س کا عرض بلد ط ہو تو ط س = ط اور

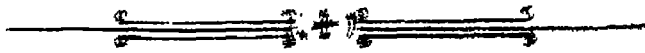
س س = (ا ت + مَف ل) جم ط = مَف سہ جب ط
اس لیے س ط = (ا ت + مَف ل) مَف سہ اور چونکہ ترکیب گردشیں
علی القوائم میں اس لیے حاصل ان کے مربعوں کے مجموعہ کا جذر المربع ہے یعنی

$$\sqrt{(ا ت + مَف ل)^2 + (مَف سہ)^2}$$

نشان ۸۔ ثابت کرو کہ کسی دے ہوئے دن میں استقبال کی بجائے
ایک سہ رو کے خط پر ہی موت کا کبوتر سے بڑا پتلاؤ

رات سے منانی گدہ منہ سے

سے ہوتے کہ وہ سب سہارے ہیں میں یہ ہندو دوتے ہوتے ایک بابہ دوتے پر
وہ سچ ہوئے پر انہیں جس کی مراد
جمہور جو منہ سے مراد جب نہ تو سہارے نہ تو منہ سے مراد (توت۔ منہ سے)۔
سہارے اور لا آخر یہ کہ ہوتا ہوا ٹھس جی "کی دوتے دوتے پر دوتے ہوتا ہے۔



(۲۰۱)

نواں باب

کوکبی وقت اور اوسط وقت

صفحہ	دفعہ
۳۰۹	۶۲ - کوکبی وقت
۳۱۱	۶۳ - ہیئت طہری کی تصحیح
۳۱۵	۶۴ - طریق الشمس کا میلان
۳۲۰	۶۵ - صعود مستقیم کی تعیین میں جتنی صحت ممکن ہے اس کی تخمین
۳۲۳	۶۶ - کوکبی سال اور شمسی سال
۳۲۶	۶۷ - اوسط حرکت کا ہندسی اصول
۳۳۱	۶۸ - اوسط وقت
۳۳۵	۶۹ - اوسط ظہر پر کوکبی وقت
۳۳۸	۷۰ - کوکبی وقت سے اوسط وقت معلوم کرنا
۳۴۲	۷۱ - ارضی تاریخ خط
	۶۲ - کوکبی وقت -

ہم دیکھ چکے ہیں (مثال صفحہ ۳۰۹) کہ ۲ تقریباً ۲۴۵۰۰ سال میں
ساواستہ کی ایک مکمل گردش کی تکمیل کرتا ہے اور وہ ایسی سمت میں کہ
اس وقفہ میں ستارے ۲ کی یہ نسبت ایک مکمل ظاہری گردش کم کر چکے ہیں۔
زمین کی محوری گردش کے عرصہ کو کوکبی یوم (دفعہ ۳۴۳) کے ساتھ وہی نسبت ہے

جو ۲۲۵۰۰ سال + ایک دن کو ۲۲۵۰۰ سال سے ہے۔ اس طرح زمین کی محوری گردش کی مدت کو کوئی یوم سے (جو رصد گاہ میں عملاً استعمال ہوتا ہے) تقریباً بقدر ثانیہ کے ایک سوں حصہ کے بڑی ہے۔ دفعہ ۵۹ میں یہ بتایا جا چکا ہے کہ ۲ کی حرکت میں بے قاعدگیوں کی وجہ سے کو کوئی یوم کے طول میں جو تغیرات ہوتے ہیں وہ اس قدر چھوٹے ہیں کہ انہیں نظر انداز کیا جاسکتا ہے کو کوئی گھڑی میں جس سے ہمارا مطلب ایسی گھڑی سے ہے جو کو کوئی وقت کو بتلاتی ہے ایک ڈال ہوتا ہے جو ۲۲ مسوی حوالوں میں تقسیم ہوتا ہے اور ان حصوں پر صفر سے لیکر ۲۲ تک ہندسے کندہ ہوتے ہیں۔ جب ۲ مشاہد کے نصف انہما پر ہوتا ہے تو کو کوئی گھڑی (اگر اس میں کوئی خطا نہیں ہے) وقت گ۔ گ۔ ب۔ ب۔ بتلاتی ہے اور اگر گھڑی کی رفتار صحیح ہو تو وہ پھر وقت گ۔ ب۔ ب۔ بتلائے گی جبکہ ۲ نصف انہما پر پھر واپس ہوگا۔

رصد گاہ میں کو کوئی وقت کا انتظام رکھنے میں یہ خاص فائدہ ہے کہ (۲۰۲) ایک ہی ستارہ بعض بھجونی تقسیمات کے تحت نصف انہما کو ہر دن ایک ہی کو کوئی وقت پر عبور کرتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر ایک ستارے کی ذاتی حرکت کی سالانہ مقدار قوس کے رخ ثنائی ہو یعنی اگر ستارہ اپنے محل سے ایک سال کے عرصہ میں کو کوئی سماوی پرتوس کے رخ ثنائی ہوتے تو ثابت کرو کہ اس حرکت کا جہاں تک تعلق ہے اس ستارہ کے دو متواتر مروجوں کے درمیان وقفہ ایک کو کوئی یوم سے

۸۰۰۰۰۰۰ × رخ قطبہ ثنائیوں

سے زیادہ فرق نہیں رکھ سکتا جہاں غہ ستارہ کا میل ہے۔

مثال ۲۔ اگر اس المحل کا قائلہ ایک ثابت استوائی ستارہ سے

پ + ق + (ج + م + ب) جب م +

ہو جہاں پ 'ق' 'م' 'ب' مستقل ہیں اور ت وقت ہے جو سالوں میں دیا گیا ہے تو ثابت کرو کہ اس المحل کے دو متواتر بالائی مروجوں کے درمیانی وقفہ کے

حسب ذیل دو انتہائی حدود ہوں گے

$$۳۶۶۶۲۴ \sqrt{۲ + ۲} \text{ م} + ۲۴$$

$$۳۶۶۶۲۴ \sqrt{۲ + ۲} \text{ م} - ۲۴$$

فرض کرو کہ ۶ کے بالائی مُرور کا ایک وقت ت ہے تو دوسرا بالائی مُرور

تقریباً وقت ت + $\frac{۱}{۳۶۶۶۲۴}$ پر واقع ہوگا۔ ۶ کا فاصلہ اس کے ابتدائی محل سے

$$پ + ق (ت + \frac{۱}{۳۶۶۶۲۴}) + (ج م ت - م) \frac{۱}{۳۶۶۶۲۴} \text{ جب م ت}$$

$$+ ب جب م ت + م ب \frac{۱}{۳۶۶۶۲۴} \text{ جب م ت}$$

$$- (پ + ق ت + ج م ت + ب جب م ت)$$

کے تبدیل ہو چکا ہوگا۔

اس میں دوری حصہ $\frac{۱}{۳۶۶۶۲۴}$ (ب ج م ت - ج م ت) ہے اور ت

کی کوئی ایسی قیمت نہیں ہے جو اس کو عدد $\frac{۱}{۳۶۶۶۲۴}$ (۲ + ۲) سے بڑا کر سکے۔

۶۳۔ مہستی گھڑی کی تصحیح -

ہیئت گھڑی کی تصحیح معلوم کرنے کا علمی طریقہ اپنی سادہ ترین شکل میں

حسب ذیل ہے -

الفیغریس سے ہر دسویں دن کے لیے سیکڑوں بنیادی ستاروں کے ظاہری صعود مستقیم معلوم ہوتے ہیں یہ ستارے سماوات میں اس طرح پھیلے ہوئے ہوتے ہیں کہ ہر جگہ اور ہر ساعت ان میں سے ایک یا زیادہ ستارے

اس لیے گھڑی اس وقفہ میں جس شرح سے وقت ضائع کر رہی ہے

$$۵۰ \times \frac{۲۴}{۲۵} \times ۲۱۶ = ۲۰۰۰ \text{ ثانیہ فی یوم ہے۔}$$

جب گھڑی کی شرح معلوم ہوتی ہے تو دو ستاروں کے صعود مستقیم کا فرق ان کے اوقات مرور کے فرق کا مشاہدہ کرنے سے اور پھر اس وقفہ میں گھڑی کی شرح کے لیے جو تصحیح حاصل ہوئی ہے اُس کو عائد کرنے سے معلوم کیا جاتا ہے۔

اس طرح اگر صرف ایک جرم سماوی کا ہی صعود مستقیم معلوم ہو تو ہم دوسرے اجرام سماوی کے صعود مستقیم بعض شرائط کے تحت متعین کر سکتے ہیں۔ اس لیے اب صرف یہ دکھانا ہے کہ ایک واحد بنیادی صعود مستقیم کس طرح حاصل کیا جاتا ہے، اب چونکہ ۲ کا محل سورج کی حرکت سے معلوم ہو جاتا ہے اس لیے یہ ظاہر ہے کہ سورج ہی وہ جسم ہونا چاہئے جس کا مشاہدہ اس مقصد کے لیے کیا جائے۔

اگر طریق الشمس کا میلان سے ہو اور سورج کا صعود مستقیم ع اور میلان نہ ہو جہاں سورج کے مرکز کو طریق الشمس میں فرض کیا گیا ہے تو

جب ع = مس ضہ مم سے (۱)
ہم مان لیں گے کہ سے معلوم ہے (دفعہ ۶۴) اور ضہ کا مشاہدہ کیا جا چکا ہے پھر اس مساوات سے ع محسوب کیا جاسکتا ہے۔ اگر مرور کا وقت تہ ہو جو ہیئت گھڑی سے مشاہدہ کیا گیا ہے تو گھڑی کی خطا ع - تہ معلوم ہو جاتی ہے (۲۰۴)
اس عمل کی تمثیل کے لیے ہم حسب ذیل صورت لے سکتے ہیں:-

فرض کرو کہ گرینیچ کے نصف النہار پر بتاریخ ۲۸ مارچ ۱۹۰۹ء سورج کے مرور کا وقت گھڑی سے ۶:۲۶:۵۱ ثانیہ معلوم ہوتا ہے اور سورج کے مرکز کا مشاہدہ کردہ میل ۵۱° ۵۳' ۱۳" بیش ہے۔ طریق الشمس کا میلان ۲۳° ۲۶' ۶۱" معلوم ہے اور ہم گھڑی کی تصحیح معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ مرور پر سورج کا صعود مستقیم ضابطہ (۱) سے معلوم کیا جاتا ہے اور پھر حساب کا عمل

حسب ذیل ہے :-

$$\begin{array}{r} \text{لی مس } ۵۱۲ \text{ } ۱۱۳ \text{ } ۸۵۹۶۱۳۵۶ \\ \text{لوک م } ۲۶۲۳ \text{ } ۶۵۱ \text{ } ۰۵۳۶۲۶۰۰۲ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{لی جب بگ } ۳۶ \text{ } ۲۱۶۶ = ۹۵۰۵۹۸۳۵۹ \\ \text{اس لیے گھڑی کی تصحیح ہے} \\ \text{بگ } ۲۶ \text{ } ۲۱۶۶ - (\text{بگ } ۲۶ \text{ } ۲۱۶۶) = -۲۶۶۵ \end{array}$$

گھڑی کے کسی وقت میں یہ تصحیح کرنے سے اور گھڑی کی شرح (جسے مستقل مان لیا گیا ہے) کی رعایت رکھنے سے متناظر اصل کوئی وقت معلوم ہو جاتا ہے۔

کسی ستارہ کا صعود مستقیم معلوم کرنے کے حسب ذیل طریقہ میں ہم فرض کر لیں گے کہ استقبال اور کبوتر کے اثرات کا لحاظ رکھا جا چکا ہے۔ فرض کرو کہ ایک ستارہ کا نامعلوم صعود مستقیم α ہے اور کسی دن کسی مقام پر ت کوئی وقت کا وہ وقفہ ہے جو سورج کے μ دور کے بعد سے ستارہ کے μ دور تک گزرتا ہے۔ اس لیے سورج کا صعود مستقیم α - μ ہے اگر اس کا میل δ ہو اور طریق الشمس کا میلان λ سے ہو تو

جب (ع - ت) = مس δ μ سے (۲)
اثنائے سال میں کسی دوسرے موقع پر فرض کرو کہ سورج کا میل δ ہے اور اس کا μ دور ستارہ کے μ دور سے وقت ت قبل واقع ہوا ہے تو

جب (ع - ت) = مس δ μ سے (۳)
ان مساواتوں کو تغیراتی کرنے سے اور پھر جمع کرنے سے ہم یہ آسانی افذ کرتے ہیں

ع - ت = { (ت - ت) } = μ (ت - ت) جب (ضم - ضم) قمر (ضم + ضم) (۴)
پس ضم اور ضم کا اور وقت کے وقفوں ت اور ت کا مشابہہ کرنے سے

علم معلوم کرنے کے ذرائع حاصل ہوتے ہیں اگرچہ سہ کی قیمت پہلے سے نامعلوم ہو۔

(۲۰۵) مثال ۱۔ اگر ہستی گھڑی کی تصحیح گھڑی کے وقت ت پر ع ہو اور اگر گھڑی فی دن رٹانے تیز ہو تو ثابت کر دو کہ اصلی وقت حاصل کرنے کے لیے گھڑی کے کسی وقت ت میں جو تصحیح عائد کرنی ہوگی وہ ع۔ (ت۔ ت) ۲۲۲ ہے جہاں ت اور ت گھنٹوں میں بیان کئے گئے ہیں۔

مثال ۲۔ اوسط وقت کی ایک گھڑی کے رقااص کے وسط میں ایک چھوٹا سا شیلف (Shelf) لگا یا گیا ہے جس پر چند چھوٹی مساوی کمیتیں ہیں جن میں سے ہر ایک ٹھیک اس قدر وزنی ہے کہ ان کی تعداد میں ایک کے اضافہ سے گھڑی کی شرح میں ایک ثانیہ یومیہ کا اضافہ ہوتا ہے۔ یہ انتظام کیا گیا ہے کہ ان کمیتوں کی کوئی چھوٹی تعداد شیلف پر رکھی جاسکتی ہے یا شیلف سے جدا کی جاسکتی ہے جبکہ گھڑی چل رہی ہو اور اس سے گھڑی کی حرکت میں خلل واقع نہیں ہوتا۔

اگر کل بوقت ظہر گھڑی کی تصحیح ع تھی اور آج بوقت ظہر ع ہے تو ثابت کر دو کہ کمیتوں کی وہ تعداد جو شیلف پر رکھنی ہوگی تاکہ کل بوقت ظہر گھڑی ٹھیک وقت بتلائے ع۔ ع۔ ع۔ ہے۔

مثال ۳۔ بتائیے ۲۵ مارچ ۱۹۵۰ء سورج نصف النہار کو جبار (Orion) سے گ ۵ ۳۴ ۴ قبل عبور کرتا ہے اور بتائیے ۲۰ ستمبر سورج

نصف النہار کو جبار (ع) کے گ ۵ ۴۸ ۲ بعد عبور کرتا ہے۔ ان تاریخوں میں سورج کے میل علی الترتیب + ۴۰ ۱ ۲ اور + ۲۲ ۲ ۳ ہیں۔ ثابت کر دو کہ جبار (ع) کا صعود مستقیم تقریباً گ ۵ ۵۰ ۱۴ ہے۔

۶۲۔ طریق الشمس کا میلان۔ طریق الشمس کا میلان

(دیکھو صفحہ ۲۸۸) تقریباً انقلاب کے وقت سورج کے میل کی پیمائش سے معلوم کیا جاتا ہے۔ اگر یہ پیمائش انقلاب کے وقت عمل میں آسکے تو میلان اس پیمائش کردہ میل کے مساوی ہوگا۔ لیکن عین انقلاب کے وقت سورج کے میل کا مشاہدہ کرنا بالعموم عملاً آسان نہیں ہے۔ اس لیے غور طلب سوال یہ ہے کہ یہ میلان کس طرح حاصل کیا جاتا ہے جبکہ سورج کے میل کا مشاہدہ انقلاب کے قریب زمانہ میں کیا جائے اور صعود و مستقیم معلوم ہو۔
 دفعہ ماضی کی بموجب

مس سہ = مس ضہ قم عہ (۱)
 پہلی نظر میں یہ دکھائی دیگا کہ سہ کی تعیین کے لیے جبکہ ضہ اور عہ دئے گئے ہوں اس سے زیادہ سادہ ضابطہ ہو نہیں سکتا۔ لیکن ہم بتائیں گے کہ اعمال حساب کے لیے اس سے زیادہ عملاً مفید ضابطہ حاصل کیا جاسکتا ہے اگرچہ اس کی شکل زیادہ پیچیدہ ہے اور گو وہ صرف ایک تقریبی ضابطہ ہے اور مندرجہ بالا ضابطہ (۱) بالکل ٹھیک ہے۔
 انقلاب گرما کے لیے ضابطہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس (سہ - ضہ)} = \frac{\text{مس ضہ (۱ - جب عہ)}}{\text{جب عہ + مس}^۲ \text{ ضہ}}$$

= جب ضہ جم ضہ (۱ - جب عہ) کیونکہ جب عہ تقریباً ایک ہے

$$\text{اس لیے سہ - ضہ} = \text{جب}^۲ \text{ ضہ جب}^۲ (۱ - \frac{۱}{۲} \text{ عہ}) \text{ قم}^۲ \text{ (۲)}$$

(۲۰۶) یہ وہ خاص ضابطہ ہے جو اس عمل حساب میں استعمال ہونا چاہئے کیونکہ ضابطہ (۲) میں ہم سہ کو محسوب نہیں کر رہے ہیں بلکہ سہ - ضہ کو اور چونکہ سہ قریب قریب ضہ کے مساوی ہے اس لیے صرف چھوٹی مقدار سہ - ضہ کو محسوب کرنا ہوتا ہے۔ اس کی تشریح ایک خاص صورت کے لیے کی جائے گی۔

بتاریخ ۲۲ جون سنہ ۱۹۰۹ء سورج کا ظاہری میل بمقام گریونج بوقت

ظاہری ظہر ۲۳ ۲۴ ۳۵ ہے۔ اس کا صعود و تقسیم ۶ ۲۹ ۳۵ (۹۰ ۲۸ ۳۵ ۴۹) ہے۔
اب ہم سہ - ضہ کو ضابطہ (۲) سے محسوب کرتے ہیں اور لوکارتموں میں
اعشاریہ کے صرف تین مقامات استعمال کرتے ہیں۔

$$\text{ل جب ۲ ضہ} = ۹۵۸۶۳ =$$

$$\text{ل جب (۲۵ - ۱۴) عہ} = ۷۵۷۷۲ = (۷)$$

$$\text{ل جب ۲ ضہ} = ۷۵۷۷۲ = (۷)$$

$$\text{لوک قم ۱} = ۵۵۳۱۳ =$$

$$\text{لوک (سہ - ضہ)} = ۵۳۲۵ = \text{سہ - ضہ} = ۲۵۱ +$$

$$\text{سہ} = ۶۳۲۴۲۳$$

لوکارتموں میں تین سے زیادہ ہندسوں کے استعمال میں کوئی فائدہ
نہیں ہے کیونکہ بقیہ ہندسوں کو ترک کرنے سے سہ میں ۱۰ کا فرق
کسی حال نہیں ہو سکتا۔ یہ بھی واضح ہے کہ ضہ کو صرف قریب ترین منٹ
تک لینا کافی ہے جبکہ لوک جب ۲ ضہ کو لکھا جا رہا ہو۔

اگر ہم سہ کو ضابطہ (۱) میں تین ہندسی لوکارتم استعمال کر کے معلوم
کرنے کی کوشش کرتے تو حاصل ہوتا

$$\text{ل مس ضہ} = ۹۵۶۳۷ =$$

$$\text{ل جب عہ} = ۰۰۰۰ =$$

$$\text{ل مس سہ} = ۹۵۶۳۷ =$$

جس سے یہ ظاہر ہے کہ سہ ۲۳ ۲۴ ۲۵ اور ۲۸ ۲۹ ۳۰ کے درمیان
کوئی زاویہ ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ ضابطہ (۲) سے سہ کی
قیمت ۱۰۶۱ تک صحیح ملتی ہے اور برخلاف اس کے ضابطہ (۱) سے سہ
کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے وہ تقریباً ۳۰ تک غلط ہو سکتی ہے حالانکہ
ہر صورت میں لوکارتموں میں اعشاریہ کے مقامات کی ایک ہی تعداد

استعمال کی گئی ہے۔ چند مزید آزمائشوں سے یہ معلوم ہو گا کہ تین ہندسی لوکارتموں کو تقریبی ضابطہ (۲) میں استعمال کرنے سے فی الواقع ایک زیادہ صحیح نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ نسبت اس کے کہ ٹھیک ضابطہ (۱) میں ۴، ۵، ۶ یا ۷ ہندسی لوکارتم بھی استعمال کئے جائیں اور یہ بات صحیح ہے باوجود اس کے کہ ضابطہ (۲) ضابطہ (۱) سے ماخوذ ہے۔

بلاشبہ ضابطہ (۱) سے صحیح نتیجہ حاصل ہو گا اگر لوکارتموں میں اعشاریہ کے مقامات کی کافی تعداد استعمال کی جائے۔ مثلاً، ہندسے استعمال کرتے

$$\text{لوک سس فہ} = 956342195$$

$$\text{لوک جب عہ} = 959999848$$

$$\text{لوک سس سہ} = 956343014$$

(۲۰۴) اور اس سے صحیح نتیجہ سہ = ۹۵۶۳۴۰۲۳ حاصل ہوتا ہے۔ لیکن یہ بغیر بنی ادراج کے حاصل نہیں ہو سکتا اگرچہ ہم بیگے (Begay) کی جدولیں استعمال کریں جن میں مثلثی تقاطعوں کے لوکارتم قوس کے ہر ثانیہ کے لیے درج ہیں۔

نہ صرف طریق الشمس کے میلان کی تعیین کے سلسلہ میں بلکہ دیگر ایسی مسئلوں میں بھی جن میں ایک نامعلوم مقدار کی تلاش کی جاتی ہے اور جن میں عمل حساب کے لیے سب سے زیادہ موزوں ضابطہ کا انتخاب کرنا ہوتا ہے نکتہ مشرقی اصد نہایت اہم ہے۔

بالعموم ہمیں ایسا ضابطہ منتخب کرنا چاہئے جس سے ضابطہ (۲) کی طرح ایک ایسا جملہ ملے جو نامعلوم مقدار کی ٹھیک قیمت کو تعبیر نہ کرے بلکہ نامعلوم مقدار اور ایک معلومہ تقریبی قیمت کے درمیانی فرق کو ظاہر کرے۔ جب ایسا ضابطہ مل جائے تو عمل حساب میں تکلیف دہ بینی ادراج سے بالعموم نجات مل سکتی ہے اور لوکارتموں میں اعشاریہ کے مقامات کی تھوڑی تعداد کافی ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ انقلاب سرما کے قریب زمانہ میں طریق الشمس کا میلان سے ضابطہ $\text{سم} = \text{ضہ} + \text{قم}$ آجب ۲ ضہ جب ۲ (۵۴ + ۱۶ عہ) سے حاصل ہوتا ہے جہاں سورج کا صعود مستقیم عہ ہے اور جنوبی میل ضہ۔ نیز اس ضابطہ کو یہ ثابت کرنے میں استعمال کرو کہ جس وقت ضہ = ۲۳ ۲۶ ۵۸ ۵۲ ج اور $\text{عہ} = ۱۷ ۵۷ ۵۸ ۴۷$ (۲۲ دسمبر ۱۹۰۴ء) تو طریق الشمس کا میلان $۲۳ ۲۷ ۵۹$ ہے۔

مثال ۲۔ حسب ذیل مشاہدہ اور مفروضات سے ثابت کرو کہ تباریخ یکم جنوری ۱۸۹۳ء طریق الشمس کا میلان $۲۳ ۲۷ ۳۶$ ۱۱ تھا۔ مشاہدہ :-

۵ (سورج) کا ظاہری میل تباریخ ۱۹ جون ۱۸۹۳ء بوقت ظاہری ظہر ۲۳ ۲۶ ۲۰ ۲۱ ش
۵ کا ظاہری صعود مستقیم تباریخ ۱۹ جون ۱۸۹۳ء بوقت ظاہری ظہر ۵ ۵۲ ۵۲ ۱۱ ش

۵ کا ظاہری عرض بلد تباریخ ۱۹ جون ۲۵ ۲۵ ش
میلان میں کبو تباریخ ۱۹ جون ۳ ۳۷ +
میلان میں قرنی تبدیلی سالانہ - ۶ ۴۷ ۲۵

سیاروی اختلال (perturbations) کی باعث زمین تھوڑی حد تک کبھی تو طریق الشمس کی ایک جانب اور کبھی دوسری جانب ڈگمگاتی ہے، اس لیے سورج کا مرکز ظاہر ایک چھوٹا عرض بلد بہ رکھتا ہے جو اگرچہ بالعموم نظر انداز کیا جاتا ہے لیکن اس سوال میں محسوب کیا گیا ہے۔ سے کی قیمت تباریخ ۱۹ جون ہ آسانی حاصل ہوتی ہے

سم = ضہ - یہ جب سم قم ضہ + جب ۲ ضہ جب ۲ (۵۴ - ۱۶ عہ) قم آ

اس میں دی ہوئی قیمتیں درج کرنے سے

$$۱۸۵۰۵۵ + ۲۴۲۳ = ۳۵۵۹۵ + ۲۲۱۹۰ = ۵۷۷۸۵$$

اب چونکہ میلان میں کبوتر + ۲۴۲۳ اور میلان کی قرنی تبدیلی نصف سال کے لیے - ۲۴۲۳ ہے اس لیے اسے کی محصلہ اپنا قیمت میں تصحیحات - ۲۴۲۳ اور + ۲۴۲۳ عمل میں لانے سے آغاز سال پر اوسط میلان ۲۳۲۴۲۳ حاصل ہوتا ہے اور یہی مطلوب تھا۔

مثال ۳۔ اگر سورج کا مشاہدہ کردہ صعود مستقیم ۹۰۔ ہو اور اسکا میلان ۳۰۔ ہو تو طریق الشمس کے میلان کی تعیین کے لیے حسب ذیل ضابطہ انقلاب کے قریب مشاہدات سے معلوم کرو:-

$$\text{سہ} - \text{ضہ} = \frac{\text{مس} \times \frac{1}{2}}{\text{جب} \frac{1}{2}} - \frac{\text{مس} \times \frac{1}{2}}{\text{جب} 2} - \text{مس} \times \frac{1}{2} \text{ جب } 1 + \dots$$

جہاں سہ مطلوبہ میلان ہے اور سہ - ضہ کی پیمائش ثانیوں میں ہوئی ہے۔ حسب ذیل سوالات پر جو ضابطہ بالا سے پیدا ہوتے ہیں احتیاط کے ساتھ غور کرو:-

(۱) جو کی تعیین کے لیے اس محل کا محل معلوم ہونا ضروری ہے۔

(۲) سورج کے چھوٹے عرض بلد کی وجہ سے ضہ میں تصحیح کرنی ہوگی۔

(۳) مطلوبہ مقدار سہ بائیں جانب آتی ہے۔ [Coll. Exam]

۶۵۔ صعود مستقیم کی تعیین میں جتنی صحت ملے اسکی تخمینہ

اُس مبداء کی تعیین میں جس سے صعود مستقیم پ پ جاتے ہیں جس حد تک صحت حاصل ہو سکتی ہے اس کا امتحان کرنا مفید ہے۔

اول فرض کرو کہ میل کی مشاہدہ کردہ قیمتوں سے سورج کا صعود مستقیم محسوب کرنے میں حریق الشمس کے میلان کی قیمت میں مف سہ کی خطا تھی۔ مساوات جب غہ = مس ضہ حم سہ کو تفریق کرنے اور ضہ کو مستقل سمجھنے سے

جم عہ مف عہ = مس ضہ قم عہ مف عہ
 یا مف عہ = ۲ مس عہ قم عہ مف عہ
 اس میں سے کی تقریبی قیمت ۲۷۰۳۳ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے
 مف عہ = ۲۷۰۳۳ مس عہ مف عہ
 پس اس سے ظاہر ہے کہ جہاں تک ممکن ہو اعتدال کے قریب
 مشاہدات لینے چاہئیں۔ مف عہ کی قیمت دی ہوئی ہو تو عہ کے ساتھ
 مف عہ بھی بڑھتا ہے۔
 اب چونکہ ہم چاہتے ہیں کہ مف عہ سے عہ پر کم سے کم ممکن اثر ڈالے
 اس لیے عہ اتنا چھوٹا ہونا چاہئے جتنا ممکن ہو۔
 فرض کرو کہ میلان کی اختیار کردہ قیمت میں قوس کے ایک ثانیہ کی
 حد تک غلطی نہ ہو تو مف عہ سے آ اور اگر اس خطا سے عہ میں وقت کے
 لاشائیوں کی خطا پیدا ہو تو مف عہ = ۵۱۸۳۳ اس لیے
 لا = ۵۱۸۳۳ مس عہ
 پس اگر صعود مستقیم کو ۵۱۸۳۳ کے اندر تک صحیح حاصل کرنا ہے تو
 مس عہ ۵۱۸۳۳ یا عہ ۵۱۸۳۳ سورج کا صعود مستقیم بتاریخ ۲۰ اپریل
 واقع ہوتا ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ اعتدال سے تقریباً ایک ماہ پیشتر یا ایک
 ماہ بعد تک اس طریقہ پر بھروسہ کیا جاسکتا ہے تاکہ ۲ کا محل ثانیہ کے
 دسویں حصہ تک صحیح حاصل ہو، بشرطیکہ طریق الشمس کے میلان کی مفروضہ
 قیمت قوس کے ایک ثانیہ کے اندر تک صحیح معلوم ہو۔ بلاشبہ یہاں یہ
 تسلیم کر لیا گیا ہے کہ میل کی مشاہدہ کردہ قیمت میں کوئی خطا نہیں ہے۔
 اب ہمیں یہ غور کرنا چاہئے کہ مشاہدہ کردہ میل میں خطا ہو تو اس خطا
 کا کیا اثر سورج کے صعود مستقیم کی محسوس قیمت پر پڑے گا۔
 مساوات جب عہ = مس ضہ مم عہ کو ملحوظ عہ اور ضہ کے
 تفرق کرنے اور سے کو مستقل سمجھنے سے حاصل ہوتا ہے
 مف عہ = قط عہ قط ضہ مم عہ مف ضہ

اس کو شکل

مف عہ = قط عہ (۱۰ جب عہ مسل اسہ) مم سہ مف ضہ
 میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ ضہ پیمائش سے معلوم کیا جاسکتا ہے
 اس لیے مشاہدات کی ترتیب میں احتیاط برتنی چاہئے تاکہ کوئی خطا مف ضہ
 (اور ظاہر ہے کہ ایسی خطائیں ناگزیر ہیں) غیر مناسب طور پر عہ کو متاثر نہ کرے
 جزو ضربی مم سہ مستقل ہے اور چونکہ سورج کا میل اسہ سے ہرگز متجاوز
 نہیں ہوتا اس لیے قط ضہ میں کوئی بڑے تغیرات نہیں ہوں گے لیکن
 چونکہ قط عہ کی اسہ تک کوئی قیمت ہو سکتی ہے اس لیے یہ ظاہر
 ہے کہ مف عہ کو حتی الامکان چھوٹا رکھنے کے لیے قط عہ کو اس کی قلیل
 ترین قیمت پر رکھنا چاہئے یعنی عہ تقریباً صفر یا ۱۸۰ ہونا چاہئے اور
 اس لیے سورج ۲ یا ۳ کے قریب ہونا چاہئے اور اس لیے مشاہدات
 اعتدال ربیع یا اعتدال خریف کے قریب کرنے چاہئیں۔
 سہ کی عددی قیمت درج کرنے سے ہم آسانی سے معلوم کرتے ہیں کہ
 مف عہ کی قیمتیں سورج کے مختلف صعود مستقیموں کے جواب میں حسب ذیل ہیں

سورج کا صعود مستقیم	مف عہ
۰	۲۶۳ مف ضہ
۱	۲۶۸ مف ضہ
۲	۵۶۳ مف ضہ

اور انقلاب پر مف ضہ کا سر لا متناہی ہوگا۔
 اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اعتدالین میں سے ایک کے قریب
 مشاہدات کر کے خطاؤں کو اقل بنانا کس قدر ضروری ہے۔
 اگر صعود مستقیم ثانیہ کے دسویں حصہ کے اندر مطلوب ہو تو
 مف عہ = ۰.۱۱ = ۱.۵۵ اور اس لیے وقت کے ایک ثانیہ کے
 دسویں حصہ کی خطا سورج کے میل کی تغیر میں ۶۵.۵ کی خطا سے
 پیدا ہو سکتی ہے خواہ اعتدال کے قریب ہی مشاہدات سے کیے ہوں۔

(۲۱۰)

۶۶۔ کوہبی سال اور شمسی سال۔

زمین کی گردش کی وجہ سے کسی ارضی مشاہد کو معلوم ہوتا ہے کہ سورج سال میں ایک مرتبہ سیارات کا ایک مکمل دور کرتا ہے۔ لفظ سال کو جو مختلف معنی پہناتے جاسکتے ہیں ان میں امتیاز کرنا ضروری ہے۔

کوہبی سال وقت کا وہ وقفہ ہے جس میں سورج کا مرکز ستاروں

کے حوالہ سے ایک پوری گردش کی تکمیل کرتا ہے یا یہ کہنا زیادہ صحیح ہوگا کہ کسی ایسے ستارہ کے حوالہ سے جو طریق الشمس میں واقع ہو اور ذاتی حرکت سے محروم ہو۔ کوہبی سال وہ مدت دوران (periodic time) بھی ہے جس میں زمین سورج کے گرد ایک کوہبی گردش کی تکمیل کرتی ہے جبکہ زمین کو نظام شمسی کا ایک سیارہ سمجھا جائے۔ زمانہ ششہ میں کوہبی سال کی مدت ۳۶۵،۲۵۶،۲۵۶ اوسط شمسی یوم ہے۔

شمسی (Tropical) سال وہ اوسط وقفہ ہے جو سورج کی راس الحبل تک دو متواتر واپسیوں کے درمیان ہوتا ہے۔ یہ نقطہ (راس الحبل) طریق الشمس پر استقبال کی وجہ سے حرکت کرتا ہے اور سالانہ ۳۶۵،۲۵۶،۲۵۶ (نیو کوسٹ) کی شرح (ششہ ۶) سے سورج سے ملنے بڑھتا ہے۔ پس شمسی سال کوہبی سال سے بقدر نسبت

۳۶۵،۲۵۶،۲۵۶ / ۳۶۵،۲۵۶،۲۵۶ کے چھوٹا ہے اور ۲۲،۲۲۲،۲۲۲ اوسط شمسی یوم کے مساوی ہے۔ ہم یہ ذکر کر چکے ہیں (دیکھو نوٹ صفحہ ۲۹۲) کہ ہیئت عمل حساب میں شمسی سال کا آغاز اُس آن سے ہوتا ہے جبکہ سورج کا اوسط طول بلد ٹھیک ۲۸۰ ہو یہ ششہ ۱۹۱ میں ۳۵،۷۰۰ جنوری کے متناظر تھا۔

کاروباری سال متعین کرنے میں شمسی سال کو بنیاد قرار دیا جاتا ہے نہ کہ کوہبی سال کو۔ جولین کیالندر کی بموجب شمسی سال کو ۳۶۵،۲۵۶،۲۵۶

فرغ کیا گیا تھا اور یہ انتظام تھا کہ ہر چار متصل کاروباری سالوں میں تین سال تو ۳۶۵ دن فی سال کے حساب سے ہوں اور چوتھا سال لینے وہ جو ۴ سے تقسیم پذیر ہے (Leap year) سال کبیسہ ہو اور اس سال فردری کے مہینہ میں ۲۹ فردری کا اضافہ ہوتا کہ یہ سال ۳۶۶ دن کا ہو جائے۔ اس انتظام سے اوسط کاروباری سال شمسی سال سے تقریباً ۱۱ منٹ بڑھ گیا۔

ادسٹ کاروباری سال اور شمسی سال میں زیادہ مطابقت پیدا کرنے کے لیے گریگوری کی تصحیح جولین کیلنڈر میں داخل کی گئی۔ اس تصحیح کی بموجب ہر چار صدیوں میں جولین قاعدے سے جتنے سال کبیسہ آتے ہیں ان میں سے تین سال معمولی ۳۶۵ دن کے متصور ہوتے ہیں۔ اگر سال کو تعبیر کرنے والا عدد دو صفروں پر ختم ہو تو وہ چونکہ ۴ سے تقسیم پذیر ہوتا ہے اس لیے جولین قاعدے کی بموجب بلاشبہ سال کبیسہ ہوگا۔ لیکن گریگوری کی تصحیح کی بموجب جو کیا لنڈر مرتب ہوا ہوا اس میں ایسا سال سال کبیسہ نہیں ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ سن کو تعبیر کرنے والے عدد کے پہلے دو ہندسے ۴ سے تقسیم پذیر ہوں مثلاً ۱۹۰۰، ۲۱۰۰، ۲۲۰۰، ۲۳۰۰ اگرچہ جولین سال کبیسہ ہیں گریگوری کے سال کبیسہ نہیں لیکن ۲۰۰۰ اور ۲۴۰۰ دونوں نظاموں میں سال کبیسہ ہیں۔ ہم وہ جولین کیلنڈر استعمال کرتے ہیں جس میں گریگوری کی تصحیح داخل کی گئی ہے۔

(۲۱۱)

پس موجودہ کیلنڈر میں ہر چار صدیوں میں ۹۷ سال کبیسہ ہوتے ہیں اور اس لیے چار صدیوں میں دنوں کی تعداد $4 \times 365 + 97 = 146097$ ہوتی ہے۔ اس لیے کاروباری سال کا اوسط طول ہمارے موجودہ نظام کی بموجب 365.2425 دن ہے۔ یہ شمسی سال سے 0.0003 دن کے اندر تک مطابقت رکھتا ہے۔ یہ تقرب اس قدر صحیح ہے کہ چند ہزار سال تک ایک دن کی خطا بھی پیدا نہیں ہوگی۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ کسی رصد گاہ میں ایک شمسی سال کے دوران میں راس الحمل کے بالائی انگہوں کی تعداد (یعنی ۲ میں سے سورج کے دو متصل

عجوبہوں کے درمیان کو کبی ایام کی تعداد اسی صد گاہ میں اسی سال سورج کے بالائی تکبیدوں کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتی ہے۔

سال کے آغاز کے بعد ۷ کے پہلے مہرے کچھ دیر کے بعد سورج کا تکبید واقع ہونا چاہئے۔ ۷ کے دوسرے تقسیم ہے چوتھے اور آئندہ تکبیدوں پر سورج روز بروز زیادہ چھپے ہوتا جائے گا تا آنکہ جب سال قریب الختم ہوگا تو وہ تقریباً پورے محیط کے برابر چھپے رہ جائے گا۔ پس سورج کے ن درین تکبید سے کچھ ہی قبل ۷ (۱ + ۱) والے تکبید واقع ہوگا۔ اگر سورج ۷ کو اس کا تکبید واقع ہونے سے قبل ملائے تو سال مکمل ہوگا لیکن سورج کے تکبیدوں کی تعداد ۷ کے تکبیدوں کی تعداد سے ایک کم ہوگی۔ اگر سورج ۷ کو عین اس وقت ملائے جبکہ ۷ کا تکبید واقع ہو تو سال کے آخری لمحہ میں سورج اور ۷ دونوں کے تکبیدوں کی تعداد میں ایک کا اضافہ ہوگا اور اس طرح پھر بھی سورج کے تکبیدوں کی تعداد ایک کم ہوگی۔

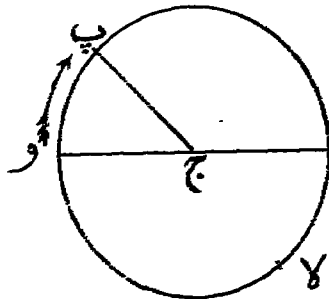
مثال ۲۔ کسی ملک میں سال کیسے کے لیے ذیل کا قاعدہ مخرج ہے :- اگر سال کے عدد کے آخر میں صفر ہوں تو صفروں کے اتنے زوج خارج کرو جتنے ممکن ہوں۔ تب اگر بقیہ عدد ۴ سے تقسیم پذیر ہو تو وہ سال کیسے ہوگا۔ دوسرے ملک میں حسب ذیل قاعدہ ہے :- سال کے عدد کو ۳۳ سے تقسیم کرو تب اگر کوئی باقی حاصل ہو اور یہ باقی ۴ سے تقسیم پذیر ہو تو وہ سال کیسے ہوگا۔ ثابت کرو کہ ان دو ملکوں میں گنتی میں ایک دن سے زیادہ کا فرق کبھی نہیں ہوگا۔

۳۳ متصلہ وقفوں میں جن میں سے ہر ایک ۴۰۰ سال کا ہوا ایک اور صرف ایک وقفہ ایسا ہونا چاہئے جس کا آغاز ایسے سال سے ہوگا جس کا عدد ۳۳ سے تقسیم پذیر ہوگا۔ یہ سال سال کیسے نہیں ہوگا اور دوسرے ملک میں ۴۰۰ سال کے اس وقفہ میں کیسے سالوں کی کل تعداد ۹۶ ہوگی اور اس طرح اس میں ایک دن کم پڑ جائے گا۔ باقی ۳۲ وقفوں میں سے ہر وقفہ میں کیسے سالوں کی تعداد ۹۶ ہوگی۔ اس لیے کل تعداد $(۴۰۰ \times ۳۳) = ۱۳۲۰۰$ سال میں $۹۶ \times ۳۳ = ۱۰۸۸$ ہوگی۔

پہلے ملک میں فی ۴۰۰ سال کبیسہ سال تعداد میں بالعموم ۹۰ ہونگے
 لیکن ۱۳۲۰۰ سال کے وقفہ میں سوال میں دی ہوئی شرط کی بموجب سنہ (۲۱۳)
 سال کبیسہ نہیں ہوگا اور اس طرح یہاں بھی ایک دن کی کمی ہو جائے۔ اس لیے
 ہر ملک میں کبیسہ سالوں کی کل تعداد ہر ۱۳۲۰۰ سال کے وقفہ میں ۹۴۴۳۳-۱
 = ۳۲۰۰ ہوگی۔ پس جمع دیکھتے ہیں کہ ۱۳۲۰۰ سال کے ہر دور میں زن دو
 ملکوں میں سے ہر ملک میں کبیسہ سالوں کی تعداد ٹھیک ۳۲۰۰ ہوگی۔
 ۶۷۔ اوسط حرکت کا ہندسی اصول۔

ایک نقطہ پ، ایک دائرہ کے محیط پر اس طرح حرکت کر رہا ہے (شکل ۶۳)
 کہ وقت ت پر زاویہ وج پ (= ص) جس کی پیمائش ایک ثابت نصف قطر
 ج و سے ہوتی ہے مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے :-

$$\left\{ \begin{aligned} & ط = ۱ + \frac{۲\pi^2}{ت} + \left(\frac{۲\pi^2}{ت} \right) \frac{ب}{ج} + \frac{۲\pi^2}{ت} \frac{ب}{ج} \\ & + \left(\frac{۲\pi^2}{ت} \right) \frac{ب}{ج} + \frac{۲\pi^2}{ت} \frac{ب}{ج} + \dots \dots \dots (۱) \\ & + \left(\frac{۲\pi^2}{ت} \right) \frac{ب}{ج} + \frac{۲\pi^2}{ت} \frac{ب}{ج} + \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$



شکل (۶۳)

نظر انداز کر دیتے ہیں۔ دوری رقوم میں ہم کافی صحت کا لحاظ رکھتے ہوئے ت کو متواتر $\frac{1}{4}$ ت $\frac{1}{4}$ ت $\frac{1}{4}$ ت بنا سکے ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ آخری تین تاریخوں میں ظاہری طول بلدوں میں سے ہر ایک کو بقدر ۳۶۰ کے بڑھانا چاہئے۔ اس طرح ضابطہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$280 \quad 28 \quad 1 = 1 + 28 + 280$$

$$342 \quad 4 \quad 30.69 = 1 + 91 \times 360 + 1 - 280$$

$$259 \quad 55 \quad 30.62 = 1 + 182 \times 360 + 1 - 280$$

$$544 \quad 39 \quad 24.42 = 1 + 243 \times 360 + 1 - 280$$

اس لیے جمع کرنے اور ت = ۳۶۵۶۲۴۲۲ رکھنے سے

$$1440 \quad 9 \quad 39.52 = 1 + 538 + 9 \quad 2856$$

$$280.6499 = 1 \text{ اور اس لیے}$$

سورج کے اوسط طول بلد کا روزانہ اضافہ ۵۹۸۵۶۵ ہے اور اس کے آغاز سے ۸۰۶۶۵۶ دنوں بعد یعنی بتاریخ ۲۲ مارچ اوسط طول بلد صفر ہے۔ اگر وہ متعدد چھوٹی رقیب جو یہاں نظر انداز کی گئی ہیں ملحوظ رکھی جائیں تو سورج کا اوسط طول بلد حاصل ہوگا

$$280.6499 + 360 \text{ ت}$$

مثال ۵۔ پچھلی مثال سے ثابت کرو کہ بتاریخ ۷ نومبر ۱۹۰۶ء سورج کا

اوسط طول بلد ۲۲۶۱.۵ ہے۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ سورج کا اوسط طول بلد بوقت ۳۹۳.۵

جنوری ۱۹۰۹ء تھا اگر یہ دیا گیا ہو کہ سورج کا اوسط طول بلد بتاریخ یکم اپریل ۱۹۰۹ء ۶۸۶۲۰.۴۹ ہے اور اس کا روزانہ اضافہ ۵۹۸۵۶۵ ہے۔

۶۸۔ اوسط وقت

اگرچہ رصد گاہ کے خاص کام کے لیے کوبی وقت کو استعمال کرنا

لازمی ہے تاہم یہ ظاہر ہے کہ ہیئت گھڑی کا رو باری زندگی کے معمولی مقاصد کو پورا نہیں کرے گی۔ اس آخری غرض کے لیے ایک ایسا دن چاہئے جس کا طول ستاروں کے ذریعہ نہیں بلکہ سورج کے ذریعہ ناپا گیا ہو۔ اس لیے ہم اپنے معمولی وقت کی پیمائش کے لیے وہ دن استعمال کرتے ہیں جو اوسط شمسی یوم کے نام سے مشہور ہے۔

اب چونکہ سورج کی حرکت صعود و ستقیم میں یکساں نہیں ہے اس لیے نصف النہار سورج کی دو متواتر واپسیوں کے درمیان وقفہ منتقل نہیں ہے۔ مثلاً ہم یہاں شمسی یوم کا کوکبی طول پورے سال ۱۹۰۹ء کے چار مساوی فصل تاریخوں پر دیتے ہیں۔

۱۹۰۹ء کوکبی

ظاہری ظہر یکم جنوری سے ظاہری ظہر دوسری جنوری تک	۲۴	۲۴	۲۴	۲۴
۲۴ اپریل سے ۲۴ اپریل تک	۳	۲۴	۳	۳۸۵
۳ جولائی سے ۴ جولائی تک	۴	۲۴	۲	۵۱۵
۲ اکتوبر سے ۳ اکتوبر	۳	۲۴	۳	۳۷۶

(۲۱۹) اس جدول کی پہلی سطر سے یہ بیان ہوتا ہے کہ اگر وہ وقت جس پر سورج کا مرکز مشاہد کے نصف النہار کو عبور کرتا ہے یکم جنوری ۱۹۰۹ء کو ہیئت گھڑی میں دیکھا جائے اور مشاہدے کو دوسرے دن دہرایا جائے تو یہ ہیئت گھڑی (اگر اس کی شرح کے لیے رعایت رکھی جائے) سے یہ معلوم ہوگا کہ کوکبی وقت کے ۲۴ گ ۲۴ ۹ ۲۴ کا وقفہ ان دو مروروں کے درمیان

گزر چکا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ظاہری شمسی یوم جس کا آغاز یکم جنوری کی ظاہری ظہر سے ہوتا ہے اس شمسی یوم سے ۱۳، ۲۴ کوکبی ٹائمنے زیادہ طویل ہے جس کا آغاز ۲ اکتوبر کی ظاہری ظہر سے ہوتا ہے۔ پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ ظاہری شمسی یوم کا طول سال تمام مستقل نہیں رہتا اور اس کے تغیرات یقیناً تین چوتھائی منٹ سے

متجاوز کرتے ہیں۔ ازل سے قاعدگیوں کی وجہ سے شمسی یوم معمولی وقت کی پیمائش کے لیے سوزوں اکائی نہیں ہے۔ ہم ایک اوسط شمسی یوم کو اکائی کے طور پر اختیار کرتے ہیں جس کا طول بہت سے سالوں کے ظاہری شمسی ایام کا اوسط وقفہ ہوتا ہے۔ اوپر کی فہرست باجہ سنہ ۱۹۷۱ء میں چار دنوں کا اوسط وقفہ ۲۴ گ ۵۷۱۳۰۰ ہے اور یہ اوسط شمسی یوم کی ایک تقریبی قیمت ہے۔

جب متصاہ ظاہری شمسی ایام کی ایک بہت بڑی تعداد کا اوسط لیا جاتا ہے تو یہ معلوم ہوا ہے کہ کوکبی وقت میں ایک شمسی یوم کا معادل ۲۴ گ ۵۷۱۵۵۵۴ ہے۔

بہمیدگیوں سے بچنے کے لیے علماء ہیئت نے اس میں سہولت دیکھی ہے کہ ایک موہوم جسم (یا زیادہ صحیح طور پر ایک نقطہ) کا خیال کیا جائے جو ہر لمحہ خط استوا پر رہے اور اس کا ظاہری صعود مستقیم سورج کے اوسط طول بلد کے مساوی ہو۔ اس موہوم جسم کو اوسط سورج کہتے ہیں۔ وقفہ ۷۴ میں یہ ثابت کیا جائے گا کہ سورج کا ظاہری صعود مستقیم سورج کے اوسط طول بلد اور دوری ریموں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ پس سورج کے ظاہری صعود مستقیم اور اوسط سورج کے ظاہری صعود مستقیم میں صرف دوری ریموں کا فرق ہوتا ہے۔ اس لیے وقت کے ایک طویل وقفہ میں اصلی سورج اور اوسط سورج کے ظاہری صعود مستقیموں کا اوسط فرق صفر کی طرف مائل ہوگا۔ اگر ہم استقبال اور کوکبی وجہ سے خط استوا کی جو حرکت ہے اسے نظر انداز کر سکیں تو اوسط سورج کے متعلق یہ کہا جاسکتا ہے کہ وہ خط استوا میں اس طور پر یکساں حرکت کرتا ہے کہ ہر لمحہ اس کا صعود مستقیم سورج کے اوسط طول بلد کے مساوی ہوتا ہے۔

جب اوسط سورج نصف النہار پر ہو تو وہ گھڑی جو مقامی اوسط وقت کو تعبیر کرتی ہے وقت بگ بگ بتائے گی۔ پس اوسط وقت کی گھڑی سے جو وقت معلوم ہوگا وہ نصف النہار سے اوسط سورج کے ساعتی زاوے کو

کسی آن پر ظاہر کرے گا۔ کاروباری مقاصد کے لیے دن کا آغاز نیم شب سے ہوتا ہے اور گھنٹے ۱۲ سے ۱۲ (ظہر تک اور پھر آگے سے ۱۲ (نیم شب) تک گنے جاتے ہیں) اول الذکر گھنٹوں کو انگریزی میں حروف M - ۱۰ سے اور آخر الذکر حروف M - ۵ سے تینز کیا جاتا ہے اور ہم انہیں علی الترتیب ب - ن (بعد نیم شب) اور ب - ظ (بعد ظہر) سے تینز کر شکے سے ہی گنتی میں دن ظہر سے ظہر تک لیا جاتا ہے، ظہر کو بگ کہتے ہیں اور بعد کے گھنٹے علی الترتیب ۱۲ تک گنے جاتے ہیں۔

مثال ۱۔ حسب ذیل مفروضات سے کوئی وقت میں اوسط شمسی یوم کا طول معلوم کرو۔

بتاریخ ۴ جولائی ۱۸۳۶ء سورج کے مرکز کا ظاہری صعود مستقیم بمقام گرینویچ مرور کے وقت مشاہدہ کرنے سے ۶ گ ۵۴ ۵۳ ۵۶ ۳۰ معلوم ہوا۔
اسی طرح بتاریخ ۴ جولائی ۱۸۹۶ء سورج کے مرکز کا صعود مستقیم ۶ گ ۵۴ ۵۳ ۵۶ ۳۰ معلوم ہوا۔

ہمیں اول وہ کوئی وقفہ معلوم کرنا ہے جو ۳ جولائی ۱۸۳۶ء کے کوئی وقت ۶ گ ۵۴ ۵۳ ۵۶ ۳۰ اور ۴ جولائی ۱۸۹۶ء کے کوئی وقت ۶ گ ۵۴ ۵۳ ۵۶ ۳۰ کے درمیان ہے۔

یہ وقفہ ۵۴ سال کا ہے اور اس لیے اس محل کے مروروں کی تعداد سورج کے مروروں کی تعداد سے ۵۴ زیادہ ہوگی (وقفہ ۶۶ مثال ۱)۔ سورج کے مروروں کی تعداد ۱۹۷۳ ہے اور ۷ کے مروروں کی تعداد ۱۹۷۷ ہے اور اس لیے پورا وقفہ کوئی وقت میں

دن گ ۵۳ ۵۴ ۵۳ ۵۶ ۳۰ - (۶ گ ۵۴ ۵۳ ۵۶ ۳۰) ث

اس کو ۱۹۷۳ سے تقسیم کرنے سے اوسط شمسی یوم کی کوئی قیمت ۲۴ گ ۵۵ ۵۵ ۵۵ ۵۶ ۳۰ معلوم ہوتی ہے۔

مثال ۲۔ اوسط شمسی یوم کا طول کوئی وقت میں حسب مثال ۱ سبق

دو لمحوں پر سورج کے صعود و ستقیموں کا مقابلہ کرنے سے معلوم کیا گیا ہے، ان لمحوں کا فرق ۳۰ سال ہے۔ ثابت کرو کہ دونوں صعود و ستقیموں میں ۵۰ سال تک بڑی خطائیں اس قیمت کو ثانیہ کے ہزارویں حصہ سے زیادہ متاثر نہیں کر سکتیں جو اوسط شمسی یوم کے لیے معاموم کی گئی ہو۔

مثال ۳۔ اوسط شمسی دقت کو کو کبھی دقت میں بدلنے کا ایک تقریبی قاعدہ اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے:- ہر ۱۰۰ کے لیے ۱۰ جمع کرو، باقی ہر ۱۰۰ کے لیے ۱۰ جمع کرو باقی ہر ۱۰۰ کے لیے ۱۰ جمع کرو۔ اس قاعدہ سے اوسط شمسی یوم کا طول معلوم کرنے میں کیا خطا ہوگی۔

مثال ۴۔ اگر شمسی سال کی مدت کے اس جملہ میں جو اوسط شمسی وقت کے دنوں، گھنٹوں، منٹوں، اور ثانیوں کی رقوم میں ہے دنوں کی تعداد میں ایک کا اضافہ کیا جائے لیکن گھنٹے، منٹ اور ثانیے نہ بدلے جائیں تو نتیجہ شمسی سال کی مدت کو کو کبھی دقت کے دنوں، گھنٹوں، منٹوں اور ثانیوں میں بیان کرے گا۔

۶۹۔ اوسط ظہر پر کو کبھی دقت -

(۱۱۸)

ایک دئے ہوئے لمحہ پر اوسط سورج کا صعود و ستقیم یا زیادہ صحیح طور پر ۲ اور اوسط سورج کا درمیانی فاصلہ حسب شرح دفعہ ۶۸ سورج کا اوسط طول بلد ہوتا ہے اور اس کے لیے جملہ ہے (مثال ۲ دفعہ ۶۷)

$$۲۸۰۶۴۹۹۳۲ + ۳۶۰ \times \text{ت} \quad \text{ت}$$

جہاں ت، شمسی سال کا طول ہے اور ت، شمسی سال کا وہ کسری حصہ ہے جو یکم جنوری ۱۹۰۹ء کی ظہر سے گزر چکا ہے۔ اس جملہ کو ۱۵ فی گھنٹہ کی شرح سے وقت میں تحویل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یکم جنوری ۱۹۰۹ء اوسط ظہر کے بعد ت اوسط شمسی ایام پر اوسط سورج کا صعود و ستقیم ہے جس کی

$$۲۸۰۶۴۹۹۳۲ + ۵۸۶۸۲ \times \text{ت} \quad \text{ت}$$

مارچ	۲	۲۱	۲۲	۵۴	۱۲
مئی	۲	۱۸	۲	۳۸	۲۴
جولائی	۲	۱۵	۶	۴۵	۲۴
ستمبر	۱	۱۲	۱۰	۴۱	۲۴
نومبر	۱	۹	۱۴	۲۵	۲۴

ضابطہ میں اندراج سے حاصل ہوتا ہے

$$۱۸ = ۱ \text{ م } ۴۱ \text{ گ } ۵۸ \text{ ث}$$

۱ میں ایک ثانیہ سے کم کا خفیف تغیر کرنے سے (جو ضروری ہے جبکہ بہت سی چھوٹی تفصیلات ملحوظ رکھی جائیں جنکا یہاں غور کرنا ممکن نہیں تھا) کی مطلوبہ قیمت حاصل ہوتی ہے

$$۱۸ \text{ گ } ۴۱ \text{ م } ۵۸ \text{ ث}$$

جب اوسط سورج نصف النہار پر آتا ہے تو اس کا صعود مستقیم بلاشبہ اس لمحہ پر کوکبی وقت ہوتا ہے۔ اس لیے ہمیں عملی علم ہیئت کا وہ اہم عنصر ملتا ہے جو اوسط ظہر کے کوکبی وقت کے طور پر مشہور ہے۔ یہ مقدار کوکبی وقت کو اوسط وقت میں اور اوسط وقت کو کوکبی وقت میں تحويل کرنے میں ناگزیر ہے۔ ایفیمرس میں ہر دن کے لیے اوسط ظہر پر کوکبی وقت دیا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ بقیام گریونج بوقت اوسط ظہر بتاریخ ۲۷ مارچ ۱۹۰۹ کوکبی وقت ۶ گ ۱۷ ث ہے۔

بتاریخ ۲۷ مارچ اوسط ظہر پر یکم جنوری سے وقفہ ۸۵ دن ہے۔
ت کی بجائے یہ قیمت جملہ

$$۱۸ \text{ م } ۴۱ \text{ گ } ۵۸ \text{ ث} + ۲۳۶۶۵۵۵۴ \text{ ث}$$

میں درج کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۲۔ معلوم کرو کہ سنہ ۱۹۰۹ء کی کس تاریخ پر اوسط سورج راس المحل میں سے گذرتا ہے۔

مثال ۳۔ اگر یہ دیا جائے کہ بمقام گرینوچ بتاریخ ۲۱ مارچ ۱۸۹۶ء راس المحل کے مرکز کے اوسط اوقات بج ۲۱ ۵۹۶۰ اور ۲۳ ۵۸۴۹ ش ہیں تو وہ لمحہ معلوم کرو جس پر گرینوچ اوسط وقت اور کوکبی وقت مساوی ہوتے ہیں

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ یکم جنوری سنہ ۱۹۰۹ء کی اوسط ظہر کے بعد

اوسط شمسی ایام پر اوسط سورج کا صعود مستقیم گ ۱۸ ۲۲ ۴۲ + ۲۳ ۵۱ ۲۳ ۶۵ ۵۵ ۲۳ ت ۶

اور سورج کا اوسط طول بلد ۲۸۰ ۵۶ ۸۱ + ۵۹ ۸۵ ۶۵ ت ہے۔

۷۔ کوکبی وقت سے اوسط وقت معلوم کرنا۔ (۲۲۰)

کسی مقام پر اوسط شمسی وقت کی تعیین فی الحقیقت بالواسطہ یا بلاواسطہ سورج کے مشاہدات پر منحصر ہوتی ہے۔ ملاح عموماً اپنے آلہ سدس سے صبح یا شام کے وقت سورج کا مشاہدہ کر کے وقت معلوم کرتا ہے۔ یہ راست طریقہ کی مثال ہے۔ لیکن ہیت داں جس کے پاس آلہ سدس کی بہ نسبت زیادہ بڑی طاقت اور صحت کے ثابت آلات ہوتے ہیں بالعموم اوسط وقت کو کوکبی وقت سے محسوب کر کے اخذ کرتا ہے کوکبی وقت کو جیسا کہ قبل ازیں دفعہ ۶۳ میں سمجھایا جا چکا ہے وہ بعض گھڑی تاروں (clock stars) کے مشاہدے سے حاصل کرتا ہے۔ ان گھڑی تاروں کے مقامات ایفیرس سے معلوم ہوتے ہیں۔ یہ مقامات ۶ کے محل پر منحصر ہوتے ہیں جسے شمسی مشاہدات سے متعین کیا جاتا ہے پس اوسط وقت کو گھڑی تارے کے ذریعہ معلوم کرنے کا یہ طریقہ ایسا ہے کہ اس میں سورج کے مشاہدات صرف بالواسطہ شامل ہیں۔ ایفیرس سے وہ اصلی کوکبی وقت معلوم ہوتا ہے جس پر گھڑی تار نصف النہار کو عبور کرتا ہے اور مشاہدہ وہ وقت نوٹ کر لیتا ہے جو اسکی

کوئی گھڑی بتاتی ہے۔ ان دو وقتوں کا فرق اس کی گھڑی کی تصحیح ہے اور اس لیے کوئی وقت معلوم ہو جاتا ہے۔ ایفیمرس سے گریونج اوسط ظہر کا کوئی وقت بھی معلوم ہوتا ہے، اس لیے اگر بوقت ظہر اوسط وقت کی گھڑی کا مقابلہ کوئی گھڑی کے ساتھ کیا جائے تو اس سے اوسط وقت کی گھڑی کی خطا معلوم ہو جائے گی۔ لیکن بالعموم بوقت ظہر اوسط وقت کی گھڑی اور کوئی گھڑی کا مقابلہ نہیں کیا جاسکتا اور نہ بالعموم مشاہد کا طول بلد صفر ہوگا۔ ایسے ہم حسب ذیل عمل کرتے ہیں :-

فرض کرو کہ گ مقامی کوئی وقت ہے

ن اسی آن مقامی اوسط وقت ہے

ل مشاہد کا طول بلد ہے گریونج کے مغرب میں

ن اوسط شمسی ایام کی تعداد ایک شمسی سال میں

$$= 365.2422$$

وہ کوئی وقت ہے جو بمقام گریونج ایک یوم قبل اوسط

ظہر پر تھا۔

ن اوسط شمسی ایام میں ن + کوئی ایام ہوتے ہیں، اس لیے شمسی وقت کا کوئی وقفہ مائل کوئی وقت میں جزو ضربی (ن + ۱) ن کے ذریعہ تحویل ہوتا ہے اور کوئی وقت کا کوئی وقفہ مائل شمسی وقت میں جزو ضربی ن (ن + ۱) کے ذریعہ تحویل ہوتا ہے۔ مجوزہ صورت میں طول بلد ل ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ اس سے حسب ذیل دو نتیجے حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) اس محل کوئی وقت کے ل گھنٹوں میں گریونج کے

نصف النہار سے مشاہد کے نصف النہار تک حرکت کرے گا۔

(۲) اوسط وقت کے ل گھنٹوں میں اوسط سورج گریونج کے

نصف النہار سے مشاہد کے نصف النہار تک حرکت کرے گا۔

چونکہ زیر بحث لمحہ پر کوئی اور اوسط مقامی اوقات گ اورت ہیں

اس لیے نتیجہ نکلتا ہے کہ گ + ل اور ت + ل گریوچ پر متناظر کوکبی اور اوسط اوقات ہیں۔

اوسط وقت کا وقفہ ت + ل کوکبی وقت میں جسز و ضربی (ن + ۱) \ ان کے ذریعہ تحویل ہوتا ہے۔ اسے گ + ل میں سے تفریق کیا جائے تو اسی دن گریوچ کی اوسط ظہر پر کوکبی وقت ملنا چاہئے، اس لیے

م = گ + ل - (ن + ۱) (ت + ل) \ ان
اس مساوات کو حسب ذیل مماثل اشکال میں لکھا جاسکتا ہے جو ایفیرس کی جدولوں کے ساتھ استعمال کرنے میں اکثر سہولت بخش ثابت ہوئی ہیں:-

ت + ل = (گ + ل - م) \ ن (ن + ۱)
گ + ل = م + (ت + ل) \ ن (ن + ۱)
کوکبی وقت سے اوسط وقت معلوم کرنے کا سب سے زیادہ عملی طریقہ غالباً حسب ذیل ہے:-

اگر ہم مندرجہ بالا تین مماثل مساواتوں میں سے کسی ایک میں ت = رکھیں اور اگر مقامی اوسط ظہر کے مقامی کوکبی وقت کو م بنا لیں تو

$$م = م + ل - ل \quad م = م + ل - ل \quad م = م + ل - ل$$

مقدار ل \ ان اس مخصوص نصف النہار کے لیے ایک مستقل مقدار ہے۔ اس کو اگر گریوچ کی اوسط ظہر کے کوکبی وقت میں جمع کیا جائے تو مقامی کوکبی وقت مقامی اوسط ظہر پر حاصل ہو جاتا ہے۔ پس یہ جملہ حاصل ہوتا ہے

ت = (گ - م) \ ن (ن + ۱)
جو ان جدولوں سے بہت ہی آسانی کے ساتھ محسوب کیا جاسکتا ہے جو کوکبی وقت کے وقفوں کو اوسط وقت کے متناظر وقفوں میں بدلنے کے لیے تیار کی جاتی ہیں۔

مثال ۱۔ اگر بمقام گرینوچ پوقت اوسط ظہر کوکبی وقت ہر ہوتو ثابت کرو کہ ایک مقام پر جس کا طول بلد (گرینوچ کے مغرب میں) ل ہے اسی دن اوسط ظہر پر کوکبی وقت م مساوات

$$م = ۹۶۸۵۶۵ + ل \times ۹$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اگر وقت کا ایک وقفہ ت سے تعبیر ہو جبکہ اُسے اوسط وقت میں شمار کیا جائے اور ت سے تعبیر ہو جبکہ اُسے کوکبی وقت میں شمار کیا جائے تو

$$ت = ۹۶۸۵۶۵ + ت$$

$$ت = ت - ۹۶۸۲۹۶$$

جہاں پر جملہ کی آخری رقم میں ت اور ت گھنٹوں اور ایک گھنٹے کے کسری حصوں میں بیان کئے گئے ہیں۔ (۲۲۲)

مثال ۳۔ بتاریخ ۱۸ فروری ۱۹۰۹ء بمقام گرینوچ اوسط ظہر پر

کوکبی وقت ۲۱ گ ۵۱ ۵۵ ۱۳ ہے۔ ثابت کرو کہ اس الحمل کا مردور

۲ گ ۳۵ ۲۵ اوسط وقت پر واقع ہوتا ہے۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ بمقام گرینوچ کوکبی ظہر کا گرینوچ اوسط وقت

یہ ہے

$$(۲۴ - م) \backslash (ن + ۱)$$

جہاں م، اوسط ظہر پر کوکبی وقت ہے اور ن، شمسی سال میں اوسط شمسی ایام کی تعداد ہے۔

نیز ثابت کرو کہ مغربی طول بلد ل پر کوکبی ظہر کا مقامی اوسط وقت، گرینوچ پر کوکبی ظہر کے گرینوچ اوسط وقت میں سے $(ن + ۱)$ تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

نوٹ :- کوکبی ظہر سے ۲ کے بالائی تکبید کا لمحہ مراد ہے۔

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ بتاریخ یکم نومبر ۱۹۰۸ء اب۔ ظہر گریونچ اوسط وقت پر بمقام مدراس کوکبی وقت ۲۱ گ ۲۹ ش ہے اگر مدراس کا طول بلد ۵ گ ۲۱ ش ہو اور گریونچ پر وقت اوسط ظہر کوکبی وقت ۱۴ گ ۱۴ ش ہو۔

مثال ۶۔ کولمبیا کالج نیویارک طول بلد ۴ گ ۵۵ م ۵۴ ش مغرب میں بتاریخ ۱۲ دسمبر ۱۹۰۸ء گریونچ پر وقت اوسط ظہر کوکبی وقت ۱۴ گ ۲۳ ش ہے۔

ثابت کرو کہ اسی دن جبکہ کولمبیا کالج پر کوکبی وقت ۲۰ گ ۸ ش ہو تو مقامی اوسط وقت ۲ گ ۳۱ م ۴۱ ش ہوگا۔

مثال ۷۔ وہ کوکبی وقت جس پر سورج کا نیم قطر بتاریخ یکم جولائی نصف النہار کو عبور کرتا ہے ۸ گ ۳۱ ش ہے۔ ثابت کرو کہ امتناظر اوسط وقت کوکبی وقت سے ۱۹ گ ۱۹ ش تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

۷۱۔ ارضی تاریخ خط۔

ذیل کی ایک مخصوص مثال کے ذریعہ ارضی تاریخ خط کا مطلب ذہن نشین کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ بمقام گریونچ بروز چہار شنبہ بتاریخ ۱۴ جون ۱۹۰۵ء وقت ۱۰ ب۔ ۱۱ گ ہے ہمیں یہ غور کرنا ہے کہ اسی آن ہر دیگر نصف النہار (مشرق یا مغرب) پر کیا وقت ہے اور خاص کر کونسادن ہے۔

نصف النہار ۹ گ ۵۹ (گریونچ کے مغرب) پر مبنیہ آن پر وقت عین نیم شب کے بعد ہے یعنی چہار شنبہ کا آغاز ہو چکا ہے۔ لیکن نصف النہار ۱۰ گ ۱۱ مغرب پر وقت ۱۱ گ ۵۹ ب۔ ظ ہے اور اس لیے اس نصف النہار

ابھی سہ شنبہ ہے اور تاریخ ۱۳ جون ہے۔ اگر ہم یہ تصور کریں کہ سطح ارض کے ہر نصف النہار پر ایک چٹ لگی ہوئی ہے جس پر گریونیوج کے ۱۲ جون ۱۹۰۹ء کے وقت ۱۰ بجے کے جواب میں ہفتہ (یا ہینس) کا دن لگھا ہوا ہے تو ان چٹوں پر کے ناموں میں اچانک تبدیلی ہوگی جب ہم اُس نصف النہار پر پہنچیں گے جو گریونیوج سے ۱۰ بجے پر ہے۔

لیکن یہ بہ آسانی معلوم ہوتا ہے کہ تسلسل کی ایک اور شکست کسی دوسرے نصف النہار پر واقع ہونی چاہئے۔ کیونکہ یہ تصور کرو کہ ہم خیال کی سرعت کے ساتھ پوری زمین کے گرد نصف النہار ۱۰ بجے مغرب کی جا حرکت کر سکتے ہیں تو ہم ان نصف النہاروں کو عبور کرتے ہوئے چلیں گے جن پر سہ شنبہ کی چٹ لگی ہے لیکن جب سفر قریب الختم ہوا اور ہم مشرق سے نصف النہار ۱۰ بجے کی طرف آ رہے ہوں تو ہم دیکھیں گے کہ نصف النہاروں پر چار شنبہ کی چٹ لگی ہے۔ اس لیے ایک نصف النہار سے جس پر ایک دن کی چٹ لگی ہے اُس نصف النہار تک جس پر دوسرے دن کی چٹ لگی ہے کوئی اور تاریخ کی تبدیلی عمل میں آچکی ہے۔

نصف النہاروں پر کی چٹوں میں تسلسل کی یہ دوسری شکست اُس طرح پیدا نہیں ہو سکتی جس طرح کہ نیم شب کے وقوع سے ہوئی تھی۔ نیم شب کے نقطے پر تبدیلی غلط سمت میں ہوگی اور بلاشبہ ۱۰ بجے ہی پوری سطح زمین پر وہ نصف النہار ہے جہاں اس وقت آدھی رات ہوگی۔

اس لیے عرض بلد کے ہر توازی میں ایک دوسرا نقطہ ہونا چاہئے جس پر تاریخوں کے تسلسل میں جو اس توازی پر کے مختلف مقامات سے متعلق ہیں ایک شکست ہو۔ اس مقصد کے لیے توازی پر کا کوئی نقطہ مقرر کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے ہم عام سہولت کا لحاظ کرتے اسے اختیاری طور پر منتخب کرتے ہیں چنانچہ اس قرارداد کی پیروی کی جاتی ہے کہ یہ نقطہ گریونیوج سے نصف النہار ۱۲ بجے سے حتی الامکان قریب واقع ہوگا وہ اس نصف النہار پر فی الواقع نہ لیا جاسکے۔ حقیقی تاریخ خط جیسا کہ وہ موسوم ہے قطب سے قطب

کھینچا جاتا ہے۔ جہاں تک کہ ۱۲ گ کا نصف النہار کھلے سمندر میں سے گذرتا ہے یہ تاریخ خط اس نصف النہار پر منطبق ہوتا ہے اور صرف کچھ اس کے راستہ کا زیادہ حصہ سمندر میں سے گذرتا ہے۔ دوسرے مقامات پر یہ تاریخ خط ۱۲ گ کے نصف النہار کی ایک یا دوسری جانب قدرے جھولتا ہے تاکہ وہ مثلاً آباد علاقے آلاسکا (Alaska) میں سے نہ گذرنے پائے یا جزائر الیشین کی ایسی تقسیم نہ کر دے کہ اُس سے وہاں کے باشندوں کو تکلیف ہو۔

مجوزہ صورت میں ۱۰ غ تک تمام مغربی طول بلدوں پر دن چار شنبہ اور تاریخ ۱۲ جون ہے۔ مغربی طول بلدوں کے دو اور گھنٹوں کے لیے یعنی ۱۰ غ سے ۱۲ غ تک یا زیادہ صحیح طور پر ۱۰ غ سے اُس نقطے تک جہاں تاریخ خط عبور کرتا ہے دن سہ شنبہ ہے اور تاریخ ۱۳ جون لیکن چونکہ یہ توازی تاریخ خط کو عبور کرتا ہے اس لیے تاریخ دقیقاً بدلتی ہے چنانچہ اس خط کے عین قریب ایک جانب وقت ۱۰ ب۔ ظ۔ دن سہ شنبہ تاریخ ۱۳ جون ہوتی ہے تو دوسری جانب وقت ۱۰ ب۔ ظ۔ دن چار شنبہ تاریخ ۱۴ جون ہوتی ہے۔ اس طرح ۱۰ ب سے تقریباً ۱۲ گ تک تمام مشرقی طول بلدوں پر دن چار شنبہ اور تاریخ ۱۴ جون ہے۔ پس یہ معلوم ہوا کہ زیر بحث لمحہ پر طول بلد کے تقریباً ۲۲ گھنٹے چار شنبہ کا دن ۱۴ جون کی تاریخ رکھتے ہیں اور دو گھنٹے سہ شنبہ کا دن ۱۳ جون کی تاریخ رکھتے ہیں دوسری مثال کے طور پر فرض کرو کہ یکشنبہ کے دن گریونچ پر وقت

(۲۲۴) ۶ ب۔ ظ ہے۔ اس لیے طول بلد ۵ گ ۵۹ م پر وقت ۱۱ ۵۹ ب۔ ظ اور دن یکشنبہ ہے لیکن طول بلد ۶ گ ۱ م پر وقت ۱۰ ب۔ ظ اور دن دو شنبہ ہے۔ اس لیے جیسے ہم طول بلد ۶ م سے مشرقاً طول بلد ۱۲ گ تک یا زیادہ صحیح طور پر اس توازی پر کے تاریخ خط تک حرکت کرتے ہیں دن دو شنبہ ہے

لیکن تاریخ خط پر (جہاں حقیقی وقت تقریباً ۶ ب۔ ن ہے) دن دفعتاً ہی ساعت پر یکشنبہ میں بدل جاتا ہے اور تاریخ خط سے گریونچ تک تمام مغربی طول بلدوں پر یکشنبہ رہتا ہے۔

نویں باب پر مثالیں

مثال ۱۔ اگر سورج کا طول بلد لہ ہو، اس کا صعود مستقیم عدہ اور طویل میلان سے تو ثابت کرو کہ لہ۔ عدہ کی بڑی سے بڑی قیمت اس وقت واقع ہوتی ہے جبکہ سس لہ = راقطہ سے اور سس عدہ = راجم سے۔

مثال ۲۔ بتاریخ ۲۲ ستمبر سورج کا میل مرور پر ۱۷۰° ۲۸' مشاہدہ کیا گیا اور بتاریخ ۲۳ ستمبر اس کا میل ۱۷۰° ۵۶' ج مشاہدہ کیا گیا۔ نیز ان دو مروروں کا کو کبھی وقفہ ۳۵° ۵۰' تھا۔ دوسرے مشاہدہ پر سورج کا صعود مستقیم کیا تھا؟

[Coll. Exam.]

اس مثال کے طریقہ سے اس المثل معلوم کرنے میں خاص خطاؤں کے واقع ہونے کا کہاں امکان ہے۔

مثال ۳۔ قطب تارہ کا صعود مستقیم ۳۱° ۱۸' ہے۔ گریونچ پر اوسط ظہر کے کو کبھی اوقات بتواریخ ۱۱ اور ۱۲ اپریل علی الترتیب ۱۹° ۵۰' اور ۲۳° ۱۵' ہیں۔ گریونچ پر بتاریخ ۱۱ اور ۱۲ اپریل قطب تارے کے تین مروروں کے اوسط اوقات معلوم کرو۔

[Coll. Exam.]

مثال ۴۔ بحری جہزی سے حسب ذیل چیزیں دی گئی ہیں:-

اوسط ظہر کا کو کبھی وقت بتواریخ ۲۱ مارچ ۱۸۹۸ء ۵۶° ۵۸'

بتاریخ ۲۲ مارچ ۱۸۹۸ء ۰° ۲۱'

تقریبی طور پر وہ اوسط وقت معلوم کرو جس پر اوسط سورج اعتدال ربع سے گذر تھا۔

[Coll. Exam.]

مثال ۵۔ ایک ستارہ جس کا صعود مستقیم گ ۵ ۹ ۳۳ ۱۹ ہے بتاریخ ۷ فروری بمقام سیڈنی (طول بلد ۱۵۱° ۱۲' ۳۳") مرور میں ہے جبکہ مشاہد کی گھڑی میں مقامی وقت گ ۸ ۳۰ ہے۔ اگر گنیوج پر بتاریخ ۷ فروری اوسط طرز اوسط سورج کا صعود مستقیم گ ۸ ۳۶ ۱۸ ہو اور اگر کوکبی وقت کا ایک گھنٹہ اوسط وقت کے ۵۹ ۵۰ کے معادل ہو تو قریب ترین ثانیہ تک معلوم کرو کہ گھڑی کتنا سست یا تیز ہے۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ ایک معلوم ستارہ کا ایک واحد ارتفاع عرض بلد معلوم کرنے کے لیے کافی ہے اگر مقامی کوکبی وقت معلوم ہو اور مقامی کوکبی وقت معلوم کرنے کے لیے کافی ہے اگر عرض بلد معلوم ہو۔
اگر مشاہدہ کردہ ارتفاع میں قوس کے لائنوں کی خطا ہو تو ماخوذ کوکبی وقت میں وقت کے $\frac{1}{15}$ لاقطہ رقم لائنوں کی خطا ہوگی جہاں لہ مقام کا عرض بلد ہے اور لہ مشاہدہ کی ان پر ستارہ کا سمت ہے۔

(۲۲۵)

مثال ۷۔ میل ضہ کے ایک ستارہ کا راسی فاصلہ ی ہے جبکہ اسے نصف النہار کے قریب ساعتی زاوے ت پر مشاہد کیا گیا۔ اگر ضہ بہت چھوٹا نہیں ہے تو ثابت کرو کہ عرض بلد مساوات

$$فہ = ی - ضہ \quad \frac{۲ \text{ جم ضہ جم فہ}}{\text{جب } ۱ - ت}$$

سے صحیح طور پر معلوم کیا جاسکتا ہے جس کی آخری رقم میں فہ کی ایک تقریبی قیمت استعمال کی جاسکتی ہے۔

مثال ۸۔ اگر وہ کوکبی اوقات جبکہ سورج نصف النہار کی ہر جانب مساوی ارتفاعوں پر پہنچتا ہے ع اور ع ہوں اور اگر اس وقت میں سورج کے میل ضہ کی تبدیلی فرضہ ہو اور اگر سورج کا صعود مستقیم بوقت مرور ع ہو تو ثابت کرو کہ اصلی کوکبی وقت حاصل کرنے کے لیے گھڑی کے وقت میں جو تصحیح کرنی ہوگی وہ

$$ع - \frac{۱}{۲} (ع + ع) - \frac{۱}{۲} (مس ضہ - \frac{مس فہ}{(ع - ع)}) \text{ جب } \frac{۱}{۲} (ع - ع) \text{ فرضہ}$$

ہے۔ نیز یہ سمجھاؤ کہ ان دو مشاہدات کے درمیان صعود مستقیم میں سورج کی جو حرکت ہے اس کو محسوب کرنے کی ضرورت کیوں نہیں ہے۔

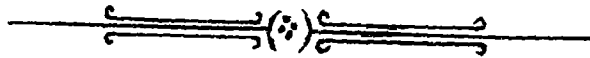
مثال ۹۔ اگر سورج کا راسی فاصلہ، نصف النہار سے قریب 'ل' ضہ مشاہدہ کیا جائے جبکہ اس کا میل ضہ ہے اور اگر وقت کے ثانیوں میں اس کا ساعتی زاویہ س ہو تو ثابت کرو کہ مقام کا عرض بلد تقریباً

$$ل - \frac{\text{جم ل جم ضہ جب } \alpha}{2 \text{ جب } (ل - ضہ)} (15 \text{ س})^2$$

ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر یہ مشاہدہ ایک جہاز سے کیا جائے جو نصف النہار کے ساتھ زاویہ طہ بنانے والی سمت میں حرکت کر رہا ہے تو بڑے سے بڑا ارتفاع اس وقت واقع ہوتا ہے جبکہ سورج فوری نصف النہار سے وقت کے تقریباً ۱۵ ثانیوں پر ہو جہاں

$$= \frac{\text{جم ضہ - ضہ}}{\text{جم ضہ}} \left(1 - \frac{\text{وجم طہ}}{2} \right) \frac{1}{\text{جب } \alpha} \times 15^2 \times 4$$

جس میں وہ طول ہے جو جہاز فی گھنٹہ طے کرتا ہے، زمین کا نصف قطر ہے، مقام کا عرض بلد ضہ، سورج کا میل ضہ، اور میل کی تبدیلی فی گھنٹہ قوس کے ثانیوں میں م ہے۔



دسواں باب سورج کی ظاہری سالانہ حرکت

صفحہ

۳۴۸

۳۵۲

۳۵۸

۳۶۱

۳۶۴

۳۷۱

۳۷۸

دفعہ
۷۲ - استواء کی تحویل

۷۳ - مرکز کی مساوات

۷۴ - وقت کی مساوات

۷۵ - وقت کی مساوات سے متعلق ضابطے

۷۶ - وقت کی مساوات کی ترسیمی تبصیر

۷۷ - وقت کی مقیم مساوات کی عام تحقیق

۷۸ - موسموں کا سلب

۷۲ - جب سورج طریق الشمس پر اپنا سالانہ دور شروع کرتا ہے تو اس کا اصلی طول بلد ۵ جو ۲ سے اس سمت میں ناپا جاتا ہے جس میں وہ حرکت کرتا ہے اگرچہ یکساں طور پر نہیں مگر مسلسل بڑھتا ہے۔ اسی طرح سورج کا صعود مستقیم ۷۷ اگرچہ یکساں طور پر نہیں مگر مسلسل بڑھتا ہے۔ سورج کے صعود مستقیم اور طول بلد کے درمیان فرق یعنی مقدار (۵ - ۵) کو جو سورج کے طول بلد میں جمع کرنی ہوگی تاکہ اس کا صعود مستقیم حاصل ہو استواء کی تحویل کہتے ہیں۔ اب ہم یہ غور کریں گے کہ دوران سال میں استواء کی تحویل میں کیا تغیرات ہوتے ہیں۔ یہ مان لیا جاتا ہے کہ سورج کا

مرکز طریق الشمس میں رہتا ہے کیونکہ یہاں اس کے چھوٹے عرض بلد کو جو اُسے کم ہے حساب میں شامل کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔
فرض کرو کہ طریق الشمس پر کے ایک نقطہ کا صعود مستقیم عہ اور میل ضہ ہے۔ اس نقطہ کا طول بلد ۵ ہے اور اگر طریق الشمس کا میلان سہ ہو تو مس عہ = جم سہ مس ۵ (۱)
اور ہم اس مساوات کو

جب (عہ - ۵) = مس ۲ - مس ۱ سہ جب (عہ + ۵) (۲)
میں تخیل کر سکتے ہیں۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ عہ - ۵ کو حدود۔ جب مس ۲ سہ اور + جب مس ۱ سہ کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔ یعنی اگر سہ کی بجائے اس کی اوسط قیمت بابت ۱۹۱۳ ۲۴ ۲۷ لی جائے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ استواء کی تخیل۔ طہ اور + طہ کے درمیان متغیر ہوتی ہے جہاں طہ = ۲ ۲۸ - ۵ کے صفر سے ۳۶۰ تک بڑھنے میں اس تخیل کے جو تغیرات واقع ہوتے ہیں ذیل کے طریقہ پر واضح کئے جاسکتے ہیں۔

جس وقت عہ اور ۵ ایک ساتھ ۷ سے چلتے ہیں جہاں وہ دونوں صفر ہیں تو ۵ اولاً بڑا ہوتا ہے اور اس لیے تخیل اولاً منفی ہوتی ہے اور اقل قیمت۔ طہ پر اس وقت پہنچتا ہے جبکہ ۵ ۲۵ + ۱ طہ ہو۔ اس کے بعد صعود مستقیم طول بلد سے نلنے کے لیے بڑھنے لگتا ہے چنانچہ ۵ اور عہ ایک ساتھ ۹۰ پر پہنچتے ہیں اور تخیل یہاں صفر ہوتی ہے۔ دوسرے ربع میں صعود مستقیم عہ سے بتدریج آگے بڑھنے لگتا ہے اور جبکہ عہ ۱۳۵ + ۱ طہ ہو جاتا ہے تو ۵ ۱۳۵ - ۱ طہ پر ہوتا ہے اور تخیل اپنی اعظم قیمت + طہ تک پہنچتی ہے۔ تیسرے ربع میں تخیل دوسرے اقل - طہ تک جاتی ہے جبکہ ۵ = ۲۲۵ + ۱ طہ اور چوتھے ربع میں تخیل دوسرے اعظم + طہ تک پہنچتی ہے جبکہ ۵ = ۳۱۵ - ۱ طہ۔ بالآخر ۵ اور عہ کی قیمتیں ۳۶۰ پر منطبق ہو جاتی ہیں جبکہ دور پورا ہو چکا ہے۔
استواء کی تخیل محسوب کرنے میں ہم ضابطہ (۳) کو استعمال کرتے ہیں جو

ضابطہ (۱) سے آسانی سے ماخوذ ہوتا ہے

سس (عہ - ۵) = سس $\frac{1}{4}$ سہ جب ۵۲ (۱ + سس $\frac{1}{4}$ سہ جم ۵۲) ... (۳)
اس ضابطہ سے تحویل فوراً حاصل ہوتی ہے اگر کوئی طول بلد دیا گیا ہو۔ نیز اس میں
سہولت ہے کہ (عہ - ۵) کے لیے ایک جلد ایک سلسلہ کی شکل میں حاصل
کیا جائے جو چھوٹی مقدار سس $\frac{1}{4}$ سہ کی صعودی قوتوں میں ترتیب یافتہ
ہو۔ یہ سب سے زیادہ آسانی کے ساتھ مساوات (۱) سے ایک مشہور پھیلاؤ
کے ذریعہ ماخوذ ہوتا ہے (دیکھو ناؤ ہنٹر کا علم مثلث مستوی صفحہ ۲۳۸)۔

$$\text{عہ - ۵} = \text{سس} \frac{1}{4} \text{ سہ جب } ۵۲ + \text{سس} \frac{1}{4} \text{ سہ جب } ۵۲ - \text{سس} \frac{1}{4} \text{ سہ جب } ۵۲$$

(۴) +

اس ضابطہ کی قمیں نیم قطری زاویوں میں بیان ہوئی ہیں اس لیے اگر
ہر نیم قطری زاویہ کی بجائے اس کا معادل $۱۳۷۵۱ = ۳۲۱۸۶۴۰۰$ وقت کے
ثانئے رکھا جائے تو یہ ضابطہ زیادہ سہولت بخش شکل میں بیان ہو جاتا ہے۔ اگر
ہم (۴) میں دے ہوئے (عہ - ۵) کے جملہ کو ۱۳۷۵۱ سے ضرب دیں اور
اگر اسے کی بجائے اس کی اوسط قیمت جو اوپر دی جا چکی ہے درج کر کے اسکی
غریہ تحویل کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{عہ - ۵} = ۵۹۲۱۳۸ - \text{جب } ۵۲ + ۱۲۶۷۶ - \text{جب } ۵۲ - ۱۳۶ - \text{جب } ۵۶$$

(۵) +

سلسلہ (۵) کی قمیں کے سر اس قدر سرعت سے گھٹتے ہیں کہ اس کی
مندرجہ بالا تین رقموں سے زیادہ رقموں کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں ہے
بالعموم آخری رقم کو بھی نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

اگر ہم یہ تسلیم کر لیں کہ (۴) کی دو رقموں سے زیادہ قمیں مطلوب نہیں
ہیں تو یہ قمیں دوسری طرح سے ضابطہ (۳) سے حاصل ہو سکتی ہیں کیونکہ
گرگوری کے سلسلہ سے حاصل ہوتا ہے

(۲۳۸)

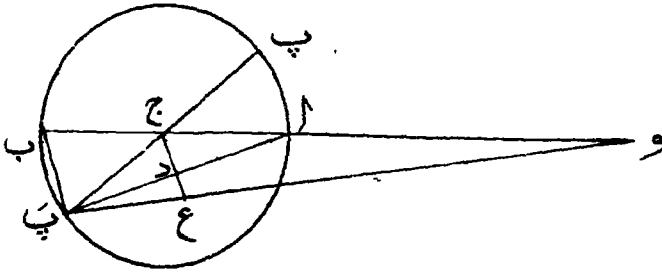
$$ع - ۵ = مس (ع - ۵) - \frac{۱}{۴} مس (ع - ۵) + =$$

$$= جب ۵۲ مس \frac{۱}{۴} اس (۱ + جم ۵۲ مس \frac{۱}{۴} اس) + \frac{۱}{۴} جب ۵۲ مس \frac{۱}{۴} اس$$

اس سے مطلوبہ جملہ حاصل ہوتا ہے جبکہ مس $\frac{۱}{۴}$ اس سے چھوٹی مقدار میں نظر انداز کی جائیں۔

مثال ۱۔ کسی دے ہوئے طول بلد کے لیے استواء کی تحول حاصل کرنا حسب ذیل ترسیبی طریقہ ثابت کرو۔

ج کو مرکز اور ج ۱ = مس $\frac{۱}{۴}$ اس کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو (شکل ۶۳)۔ ایک ثابت نقطہ و ایسا لو کہ ج و ۱ = دائرہ پر نقطہ پ ایسا معلوم کرو کہ زاویہ و ج پ = ۵۲ اور فرض کرو کہ دائرہ پر پ وہ نقطہ ہے جو پ کے متقاطع ہے۔ تب زاویہ پ و ج یہ تبدیل علامت استواء کی تحول ہے۔ فرض کرو کہ ا اور ب وہ نقطے ہیں جن میں ج و دائرہ کو قطع کرتا ہے۔



شکل (۶۳)

ا پ اور ب پ کو ملاؤ۔ ج د، ا پ پر عمود کھینچو اور اسے خارج کرو کہ وہ و پ سے ع پر ملے۔ تب پیل پ (و ا ج ب) کی غیر موسیقی نسبت و ا ا و ب = (۱ - مس $\frac{۱}{۴}$ اس) (۱ + مس $\frac{۱}{۴}$ اس) = جم سے ہے لیکن چونکہ ا پ، ب پ پر اور ج د پر عمود ہے اس لیے وہی غیر موسیقی نسبت ع د ا و ج = مس ع پ د اس د پ ج

کے بھی مساوی ہے۔ اس لیے

مس ۶ پ ۵ = جم ۵ مس ۵ پ ۴ = جم ۴ مس ۴ پ ۳ = جم ۳ مس ۳ پ ۲ = جم ۲ مس ۲ پ ۱ = جم ۱
اس لیے ۶ پ ۵ = ۵ پ ۴ اور چونکہ ج ۱ پ ۱ = ج ۲ پ ۲ = ج ۳ پ ۳ = ج ۴ پ ۴ = ج ۵ پ ۵ = ج ۶ پ ۶

مثال ۲۔ مس ذیل عمل ثابت کرو۔ کوئی خط ۱ ب ۱ لو اور اس کا
حصہ ۱ ج ایسا قطع کرو کہ ۱ ج = ۱ ب جم ۵۔ خط ۱ ب کے نقطہ ۱ پر
عمود ال کھڑا کرو۔ خط ج پ کھینچو کہ وہ ال سے پ پر ملے اور
زاویہ ۱ ج پ = ۵۔ ب پ کو ملاؤ۔ تب زاویہ ۱ ب پ = ۵
اور زاویہ ب پ ج استواء کی تخیل ہے۔

مثال ۳۔ مثال ۱ سے ثابت کرو کہ تخیل کی بڑی سے بڑی قیمت
جب ۱ (مس ۱ پ ۱) ہے اور اس صورت میں ۱ پ (مثال ۲) اس دائرہ کا
ماس ہے جو ج ب پ کا حائل ہے اور یہ کہ ۵ اور ۵ متمم ہیں۔

مثال ۴۔ اگر یہ فرض کیا جائے کہ سورج طریقی الشمس میں یکساں
طور پر حرکت کرتا ہے اور دوسرا جرم خط استواء میں اسی یکساں شرح سے حرکت
کرتا ہے تو ثابت کرو کہ ان کے صعود مستقیموں کا فرق سال میں چار دفعہ صرف
اُس صورت میں معدوم ہوگا کہ اس المحل کے نقطہ میں سے ان کے عبور
درمیان وقفہ سال کے جب ۱ (مس ۱ پ ۱) ۲۲ حصہ سے کم ہو۔

[Coll. Exam.]

فرض کرو کہ سال کی وہ کسرت ہے جو ۲ سے سورج کے عبور
اور ۲ سے اُس جرم کے عبور کے درمیان گزر چکی ہے جو خط استواء میں
حرکت کر رہا ہے۔

اگر ان دونوں اجسام کے صعود مستقیم ۵ ہوں تو
مس (۲۲ ت + ۵) جم ۵ = مس ۵
اس لیے ۵ کے لیے مساوات ملتی ہے

مس ۵ مس ۲۲ ت - (۱- جم ۵) مس ۵ + مس ۲۲ ت جم ۵ = ۵

اس مساوات کی اصلیں حقیقی ہوں گی اگر

$$۲۲ ت > جب۱ (مس۱/۲)$$

اس لیے مس ع کی دو حقیقی قیمتیں ہوں گی اور ع کی چار۔

مثال ۵۔ یہ تسلیم کر کے کہ سورج کا ظاہری مدار دائری ہے ثابت کرو کہ ایک اعتدال پر اور ایک انقلاب پر نصف النہار کو عبور کرنے میں سورج کے قطر کو جو کو کبی وقت لگتے ہیں ان میں نسبت تقریباً (جم سے - ۱۰۰۲۴ جب۱/۲) ہے جہاں طریق الشمس کا میلان سہ ہے۔

اگر سورج کا نصف قطر س اور اس کا میل ضہ ہے تو اس لمحہ پر جبکہ سورج کا اگلا کنارہ نصف النہار پر ہو اس کے مرکز کا ساعتی زاویہ - س ق ضہ ہے اس لمحہ پر کو کبی وقت ت اور سورج کا صعود سنقیم عم ہو تو

$$ت - عم = - س ق ضہ$$

اسی طرح پچھلا کنارہ نصف النہار پر ہو تو

$$ت - عم = + س ق ضہ$$

اور اس لیے (ت - ت) - (عم - عم) = ۲ س ق ضہ

مساوات مس ع = جم سے مس ۵ کو تفرق کرنے اور جم = ۵ جم ع جم ضہ کا لحاظ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فرع}{فرت} = جم سے ق ضہ \frac{فرع}{فرت}$$

لیکن چونکہ ت ایک دن میں ۳۶۰ نک بڑھتا ہے اور ۵ تقریباً ۳۶۵ دنوں میں اسی قدر بڑھتا ہے اس لیے

$$\frac{فرع}{فرت} = \frac{۱}{۳۶۵} = ۱۰۰۲۴$$

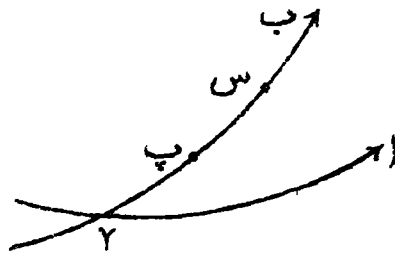
$$اس طرح \frac{فرع}{فرت} = ۱۰۰۲۴ جم سے ق ضہ$$

$$اور عم - عم = (ت - ت) فرع \backslash فرت$$

اس لیے (ت-۲) (ت-۱) { ۰۰۲۴ - ۱ } جم سے قطضہ = ۲ کر قطضہ
یا
ت-۲ = ۲ کر { ۰۰۲۴ - ۱ } جم سے قطضہ = ۲ کر
اعتدالوں پر قطضہ = ۰ اور انقلابوں پر قطضہ = ۹۰°
پر سورج کے قطر کو نصف النہار عبور کرنے میں جو کو کبھی وقت لگتا ہے اس میں
اور انقلاب پر گزرنے کو کبھی وقت میں ذیل کی نسبت ہے
(جم سے ۰۰۲۴ - ۱) \ (۰۰۲۴ - ۱) جم سے = جم سے ۰۰۲۴ - ۱ جیسا کہ

۷۳ - مرکز کی مساوات - (۲۳۰)

فرض کرو کہ خط استوا ۲ اور طریق الشمس ۲ ب (شکل ۶۵)
ہے جہاں سورج کا محل میں ہے اور سورج کے ظاہری مدار کا قریب ارضی
(Perigee) چپا ہے یعنی وہ نقطہ جس پر سورج زمین سے قریب ترین
ہوتا ہے -



شکل (۶۵)

نیز فرض کرو کہ
۲ پ = ح = قریب ارضی کا طول بلد
پ س = و = سورج کی اصلی بے قاعدگی
۲ س = ۵ = ح + و = سورج کا اصلی طول بلد
فرض کرو کہ پورے سال کے لیے اس ظاہری زاویہ کی اوسط قیمت
ن ہے جو زمین کے مرکز سے سورج کے مرکز تک گھنپا ہوا سمتی و تر روزانہ عبور
کرتا ہے - سورج کا اوسط طول بلد ل = ن ت + ح سے بیان ہوتا ہے

جہاں ت ' دنوں میں وقت ہے اور حصہ اوسط طول بلد کی قیمت ہے اس
آن پر جہاں سے وقت کی پیمائش ہوئی ہے۔ سورج کی اوسط بے قاعدگی
لی۔ حصہ ہے اور اس کے جواب میں اصلی بے قاعدگی ۵۔ حصہ ہے۔
دفعہ ۵۲ میں ہم وہ رشتہ معلوم کر چکے ہیں جو ایک ناقصی مدار میں
اصلی بے قاعدگی اور اوسط بے قاعدگی کے درمیان ہوتا ہے۔ محمولہ بالا
دفعہ کے ضابطہ میں وکی بجائے ۵۔ حصہ اور ط کی بجائے لی۔ حصہ درج
کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۵ = لی + (۲ - \frac{۱}{۴} ز) جب (لی - حصہ) + \frac{۵}{۴} ز جب (لی - ۲ - حصہ) \\ + \frac{۱۳}{۱۶} ز جب (لی - ۳ - حصہ) - (۱)$$

جہاں ز زمین کے مدار کا خروج المکز ہے۔
وہ رئیس جن میں ز شامل ہے اس قدر چھوٹی ہیں کہ اکثر مقاصد میں
ان کی ضرورت نہیں پڑتی۔ ہم انہیں حسب سابق نظر انداز کریں گے اور
صرف یہ لکھیں گے

$$۵ = لی + ۲ ز جب (لی - حصہ) + \frac{۵}{۴} ز جب (لی - ۲ - حصہ) ... (۲)$$

پس ہمیں سورج کے اوسط طول بلد کی رقوم میں اس کے اصلی طول بلد کے لیے
ایک جملہ حاصل ہو گیا۔

اس سلسلہ کو الٹانے سے اور ز کی دوسری سے اعلیٰ قوتوں کو ترک
کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$لی = ۵ - ۲ ز جب (۵ - حصہ) + \frac{۳}{۴} ز جب (۵ - ۲ - حصہ) ... (۳)$$

اس سے سورج کا اوسط طول بلد اس کے اصلی طول بلد کی رقوم میں معلوم
ہوتا ہے۔

اب ز اور حصہ کی عددی قیمتوں کا جاننا ضروری ہے اور ہم دکھائیں گے
کہ سورج کے صعود و ستقیم کے مسلسل مشاہدات سے یہ مقداریں کس طرح
معلوم ہو سکتی ہیں۔ یہ ضابطہ (۲) کے ذریعہ کیا جاتا ہے۔ اس ضابطہ کو

ہم لا = زجم حہ ، ما = زجب حہ ، لی = ن ت + حہ رکھ کر مستحیل کرینگے۔
 اولاً بہت چھوٹی مقدار ز' کو نظر انداز کرنے سے تقریبی ضابطہ
 ن ت + حہ = ۵ - ۲ لا جب ۵ + ۲ ما جم ۵ (۴)
 حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات میں چار نامعلوم مقداریں ن ، حہ ، لا ، ما ہیں۔
 انہیں معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ چند اوقات ت ، ت ، ت ، ت
 پر سورج کے صعود و مستقیم کے مشاہدات سے اس کے طول بلد ۵ ، ۵ ، ۵ ، ۵
 کا ایک سلسلہ محسوب کر لیا گیا ہے۔ ان میں کی ہر مقدار سے اوسط شمسی
 ایام کی وہ تعداد تعبیر ہوتی ہے جو ایک آن سے جہاں سے وقت کی پیمائش
 شروع ہوئی ہے گزر چکی ہے۔ ۵ کی ہر قیمت اور اس کے جواب میں
 ت کی قیمت ضابطہ (۴) میں درج کی جائے تو ن ، حہ ، لا ، ما میں ایک خطی
 مساوات ملے گی۔ ایسی چار مساواتوں سے ان چار مقداروں کی تعیین ہو
 ہو جانی چاہئے اگرچہ مزید صحت کے لیے نتیجہ کی بنیاد بہت سے مشاہدات پر
 جو متعدد سالوں پر پھیلے ہوئے ہوں رکھنی چاہئے۔ پس لا اور ما اور اس لیے
 ز اور حہ تقریباً معلوم ہو جاتے ہیں۔ ان کے ساتھ ہی ن اور حہ معلوم ہوتے
 ہیں اور اوسط طول بلد کا جملہ متعین ہو جاتا ہے۔ اب ہم مساوات (۳) کی
 اس رقم میں جس میں ز' ہے ز اور حہ کی تقریبی قیمتیں درج کرتے ہیں کیونکہ
 یہ رقم بہت چھوٹی ہے اور اس لیے اس کی قیمت میں کوئی قابل قدر
 خطا واقع نہیں ہوگی اگرچہ ز اور حہ بالکل صحیح نہ ہوں۔ اس طرح ن ، حہ ،
 لا ، ما کے درمیان ایک صحیح تر خطی مساوات حاصل ہوتی ہے اور ہر مشاہدہ
 سے ایسی ایک مساوات ملے گی۔ اس طریقہ سے ز اور حہ کو حسب خواہش
 پوری صحت کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

شمسی سال کا طول ۳۶۵ دن ہے اور بلاشبہ اگر ہم اس امر میں
 آزاد ہوتے کہ شمسی سال کو ۳۶۵ ۲۴۲ ۲۲ دنوں کا مان لیں (جیسا کہ ہم نے
 اکثر کیا ہے) تو ہم ن کو نامعلوم مقدار کے طور پر بیان نہ کرتے۔ لیکن یہاں یہ یاد دلانا
 ضروری ہے کہ ویسی ہی تحقیق سے جیسی کہ اوپر دی گئی ہے شمسی سال کی خود قیمت

کسی آن پر سورج کا اوسط طول بلد ل' اسی آن پر سورج کے
اصلی طول بلد ۵ میں مقدار

۱۱۵۔ جب (۵ - ۲۸۱)

جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ مرکز کی مساوات کبھی صفر نہیں ہوتی والا آنکہ سورج
اوجین میں سے ایک پر ہو۔

* مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اگر قوس کے ثانیوں کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو
ضابطہ (۵) ہو جاتا ہے

$$۵ = ل + ۱۳۴۲۲۰۰ \text{ جب } ل + ۹۶۰۰۰ \text{ جم } ل - ۹۶۰۰۰ \text{ جب } ل + ۲۸۰۰۰ \text{ جم } ل$$

۴۔ وقت کی مساوات

اب ہم سورج کے صعود و ستقیم نہ کو اس کے اوسط طول بلد ل' کی
رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔ کیونکہ اگر سورج کا اصلی طول بلد ۵ ہو تو دفعتاً
۲ اور ۳ سے

$$۵ = ۵ - مس ۱۲۰۰۰ \text{ جب } ۵۲ + ۱۲۰۰۰ \text{ مس } ۱۲۰۰۰ \text{ جب } ۵۲$$

$$۵ = ل + ۲ \text{ جب } (ل - ۵) + ۵ \text{ ز جب } (۲ - ل - ۵)$$

۵ کے اس جملہ میں جول کی رقوم میں حاصل ہوتا ہے متعدد رقومیں
چھوٹے سروں کے ساتھ شامل ہوتی ہیں۔ ضابطوں میں ایسی رقوموں کا
رکھنا ضروری نہیں ہے جو اس قدر چھوٹی ہوں کہ ان سے کوئی قابل قدر
اثر پیدا نہیں ہوتا اس لیے ہم ز اور مس ۱۲۰۰۰ سے کی کوئی وہ قوت یا
قوتوں کا حاصل ضرب نہیں رکھیں گے جو ۱۰۰۰۰ سے کم ہو۔ یہ شرط
مس ۱۲۰۰۰ سے = ۲۳۵۲۱۱۱ ز = ۵۹۶۴۰۱۱ مس ۱۲۰۰۰ سے = ۵۳۸۶۴۱۱
ز مس ۱۲۰۰۰ سے = ۱۳۸۵۱۱۱ اور ز ۲ = ۳۵۶۲۱۱ کے سوا باقی سب کو خارج

(۲۲۲)

کرتی ہے۔

۵ کو سا قاط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ع = ل + ۲ ز جب (ل - ح) + ۵ ز جب ۲ (ل - ح)$$

$$- مس ۱/۲ اسے ۱/۲ جب ۲ (ل - ح) + ۱/۲ اسے ۱/۲ جب ۲ (ل - ح)$$

اسے لکھ سکتے ہیں

$$ع = ل + ۲ ز جب (ل - ح) - مس ۱/۲ اسے ۱/۲ جب ۲ (ل - ح) + ۲ ز مس ۱/۲ اسے ۱/۲ جب ۲ (ل - ح)$$

$$+ ۵ ز جب ۲ (ل - ح) - ۲ ز مس ۱/۲ اسے ۱/۲ جب ۲ (ل - ح) + ۱/۲ اسے ۱/۲ اسے ۱/۲$$

چونکہ مقداریں ز، ز مس ۱/۲، مس ۱/۲ اور مس ۱/۲ سے بہت چھوٹی ہیں اس لیے جملہ (ع - ل) کی پہلی دو قیمتیں بہت ہی اہم ہیں اور دوسری ارقام زیر بحث مقصد کے لیے نظر انداز کی جاسکتی ہیں، اس لیے

$$ع = ل + ۵$$

جہاں $۵ = ۲ ز جب (ل - ح) - مس ۱/۲ اسے ۱/۲ جب ۲ (ل - ح)$

مقدار ۵ کو وقت کی مساوات کہتے ہیں۔ یہ مقدار سورج کے اوسط طول بلد میں جمع کرنی پڑتی ہے تاکہ اس کا صعود مستقیم حاصل ہو۔

و کو یہاں نیم قطری زاویوں میں بیان کیا گیا ہے۔ ہم اس کو وقت میں ۲۲ نیم قطری زاوے فی ۲۴ گھنٹہ کی شرح سے تحويل کرتے ہیں اور اس لیے گھنٹوں میں وقت کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$۱۲ \{ ۲ ز جب (ل - ح) - مس ۱/۲ اسے ۱/۲ جب ۲ (ل - ح) \} ۱۱$$

یا وقت کے ثانیوں میں

$$۵۱ \{ ۲ ز جب (ل - ح) - مس ۱/۲ اسے ۱/۲ جب ۲ (ل - ح) \}$$

اگر اس میں ز = ۵۰.۱۶۷۵، ح = ۲۸۱.۶۲ رکھا جائے تو تقریبی نتیجہ

$$ع = ل + ۹۰ ث جب ل + ۵۲ ث جم ل - ۵۹۲ ث جب ل$$

ت ، مقامی اوسط وقت منشاہدہ کی آن پر
 ت ، مقامی کوکبی وقت
 و ، وقت کی مساوات
 و ، وقت کی مساوات سابق گ۔ ا۔ ظ (گرنیج اوسط ظہر) پر
 و ، آئندہ
 م ، گرنیج کوکبی وقت ہے سابق
 م ، آئندہ
 و کی تعریف (دیکھو صفحہ ۳۶۱ سے)

ت = ظ + و (۱)
 منشاہدے کی آن پر گ۔ ا۔ و (گرنیج اوسط وقت)
 ظ + و + ل ہے اور یہ فرض کرنے سے کہ و یکساں طور پر بدلتا ہے ہمیں
 مائل ہوتا ہے

و = و + (ظ + و + ل) (و - و) (۲)
 ت = ت - ظ (۳)

نیز جب گرنیج اوسط وقت ت + ل ہو تو گرنیج کوکبی وقت ت + ل ہے
 اس لیے کہ شمس گرنیج اوسط ظہر سے کوکبی وقفہ ت + ل ہے اور یہ کوکبی
 وقفہ اوسط وقت میں جزو ضربی ۲۴ (۲۴ گھنٹہ) کے ذریعہ تبدیل ہوتا ہے
 اس لیے مساوات ملتی ہے

ت + ل = ۲۴ (ت + ل - م) (۲۴ + م - م) (۴)
 جس سے ہم مائل کرتے ہیں

ت = ت - م - م (۲۴ + م - م) (۲۴ + م - م) (۵)
 مساواتوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) سے جن میں چار مقداریں علم ظ
 ت، و، ل، آن میں ہم کوئی چار معلوم کر سکتے ہیں جبکہ دوسری دیکھی

مثال ۵۔ نیویارک (طول بلد ۷۸° ۲۳' ۱۶" غ) پر بتاريخ یکم اکتوبر وقت ظاہری ظہر کو کبھی وقت معلوم کرو یہ دیا گیا ہے کہ گرینوچ اوسط ظہر پر بتاريخ یکم دوم اکتوبر وقت کی مساوات کی عددی قیمتیں علی الترتیب ۱۰ ۲۸ ۳۳ ۳۸ ۴۳ ۴۸ ۵۳ ۵۸ ۶۳ ۶۸ ۷۳ ۷۸ ۸۳ ۸۸ ۹۳ ۹۸ ۱۰۳ ۱۰۸ ۱۱۳ ۱۱۸ ۱۲۳ ۱۲۸ ۱۳۳ ۱۳۸ ۱۴۳ ۱۴۸ ۱۵۳ ۱۵۸ ۱۶۳ ۱۶۸ ۱۷۳ ۱۷۸ ۱۸۳ ۱۸۸ ۱۹۳ ۱۹۸ ۲۰۳ ۲۰۸ ۲۱۳ ۲۱۸ ۲۲۳ ۲۲۸ ۲۳۳ ۲۳۸ ۲۴۳ ۲۴۸ ۲۵۳ ۲۵۸ ۲۶۳ ۲۶۸ ۲۷۳ ۲۷۸ ۲۸۳ ۲۸۸ ۲۹۳ ۲۹۸ ۳۰۳ ۳۰۸ ۳۱۳ ۳۱۸ ۳۲۳ ۳۲۸ ۳۳۳ ۳۳۸ ۳۴۳ ۳۴۸ ۳۵۳ ۳۵۸ ۳۶۳ ۳۶۸ ۳۷۳ ۳۷۸ ۳۸۳ ۳۸۸ ۳۹۳ ۳۹۸ ۴۰۳ ۴۰۸ ۴۱۳ ۴۱۸ ۴۲۳ ۴۲۸ ۴۳۳ ۴۳۸ ۴۴۳ ۴۴۸ ۴۵۳ ۴۵۸ ۴۶۳ ۴۶۸ ۴۷۳ ۴۷۸ ۴۸۳ ۴۸۸ ۴۹۳ ۴۹۸ ۵۰۳ ۵۰۸ ۵۱۳ ۵۱۸ ۵۲۳ ۵۲۸ ۵۳۳ ۵۳۸ ۵۴۳ ۵۴۸ ۵۵۳ ۵۵۸ ۵۶۳ ۵۶۸ ۵۷۳ ۵۷۸ ۵۸۳ ۵۸۸ ۵۹۳ ۵۹۸ ۶۰۳ ۶۰۸ ۶۱۳ ۶۱۸ ۶۲۳ ۶۲۸ ۶۳۳ ۶۳۸ ۶۴۳ ۶۴۸ ۶۵۳ ۶۵۸ ۶۶۳ ۶۶۸ ۶۷۳ ۶۷۸ ۶۸۳ ۶۸۸ ۶۹۳ ۶۹۸ ۷۰۳ ۷۰۸ ۷۱۳ ۷۱۸ ۷۲۳ ۷۲۸ ۷۳۳ ۷۳۸ ۷۴۳ ۷۴۸ ۷۵۳ ۷۵۸ ۷۶۳ ۷۶۸ ۷۷۳ ۷۷۸ ۷۸۳ ۷۸۸ ۷۹۳ ۷۹۸ ۸۰۳ ۸۰۸ ۸۱۳ ۸۱۸ ۸۲۳ ۸۲۸ ۸۳۳ ۸۳۸ ۸۴۳ ۸۴۸ ۸۵۳ ۸۵۸ ۸۶۳ ۸۶۸ ۸۷۳ ۸۷۸ ۸۸۳ ۸۸۸ ۸۹۳ ۸۹۸ ۹۰۳ ۹۰۸ ۹۱۳ ۹۱۸ ۹۲۳ ۹۲۸ ۹۳۳ ۹۳۸ ۹۴۳ ۹۴۸ ۹۵۳ ۹۵۸ ۹۶۳ ۹۶۸ ۹۷۳ ۹۷۸ ۹۸۳ ۹۸۸ ۹۹۳ ۹۹۸ ۱۰۰۳ ۱۰۰۸ ۱۰۱۳ ۱۰۱۸ ۱۰۲۳ ۱۰۲۸ ۱۰۳۳ ۱۰۳۸ ۱۰۴۳ ۱۰۴۸ ۱۰۵۳ ۱۰۵۸ ۱۰۶۳ ۱۰۶۸ ۱۰۷۳ ۱۰۷۸ ۱۰۸۳ ۱۰۸۸ ۱۰۹۳ ۱۰۹۸ ۱۱۰۳ ۱۱۰۸ ۱۱۱۳ ۱۱۱۸ ۱۱۲۳ ۱۱۲۸ ۱۱۳۳ ۱۱۳۸ ۱۱۴۳ ۱۱۴۸ ۱۱۵۳ ۱۱۵۸ ۱۱۶۳ ۱۱۶۸ ۱۱۷۳ ۱۱۷۸ ۱۱۸۳ ۱۱۸۸ ۱۱۹۳ ۱۱۹۸ ۱۲۰۳ ۱۲۰۸ ۱۲۱۳ ۱۲۱۸ ۱۲۲۳ ۱۲۲۸ ۱۲۳۳ ۱۲۳۸ ۱۲۴۳ ۱۲۴۸ ۱۲۵۳ ۱۲۵۸ ۱۲۶۳ ۱۲۶۸ ۱۲۷۳ ۱۲۷۸ ۱۲۸۳ ۱۲۸۸ ۱۲۹۳ ۱۲۹۸ ۱۳۰۳ ۱۳۰۸ ۱۳۱۳ ۱۳۱۸ ۱۳۲۳ ۱۳۲۸ ۱۳۳۳ ۱۳۳۸ ۱۳۴۳ ۱۳۴۸ ۱۳۵۳ ۱۳۵۸ ۱۳۶۳ ۱۳۶۸ ۱۳۷۳ ۱۳۷۸ ۱۳۸۳ ۱۳۸۸ ۱۳۹۳ ۱۳۹۸ ۱۴۰۳ ۱۴۰۸ ۱۴۱۳ ۱۴۱۸ ۱۴۲۳ ۱۴۲۸ ۱۴۳۳ ۱۴۳۸ ۱۴۴۳ ۱۴۴۸ ۱۴۵۳ ۱۴۵۸ ۱۴۶۳ ۱۴۶۸ ۱۴۷۳ ۱۴۷۸ ۱۴۸۳ ۱۴۸۸ ۱۴۹۳ ۱۴۹۸ ۱۵۰۳ ۱۵۰۸ ۱۵۱۳ ۱۵۱۸ ۱۵۲۳ ۱۵۲۸ ۱۵۳۳ ۱۵۳۸ ۱۵۴۳ ۱۵۴۸ ۱۵۵۳ ۱۵۵۸ ۱۵۶۳ ۱۵۶۸ ۱۵۷۳ ۱۵۷۸ ۱۵۸۳ ۱۵۸۸ ۱۵۹۳ ۱۵۹۸ ۱۶۰۳ ۱۶۰۸ ۱۶۱۳ ۱۶۱۸ ۱۶۲۳ ۱۶۲۸ ۱۶۳۳ ۱۶۳۸ ۱۶۴۳ ۱۶۴۸ ۱۶۵۳ ۱۶۵۸ ۱۶۶۳ ۱۶۶۸ ۱۶۷۳ ۱۶۷۸ ۱۶۸۳ ۱۶۸۸ ۱۶۹۳ ۱۶۹۸ ۱۷۰۳ ۱۷۰۸ ۱۷۱۳ ۱۷۱۸ ۱۷۲۳ ۱۷۲۸ ۱۷۳۳ ۱۷۳۸ ۱۷۴۳ ۱۷۴۸ ۱۷۵۳ ۱۷۵۸ ۱۷۶۳ ۱۷۶۸ ۱۷۷۳ ۱۷۷۸ ۱۷۸۳ ۱۷۸۸ ۱۷۹۳ ۱۷۹۸ ۱۸۰۳ ۱۸۰۸ ۱۸۱۳ ۱۸۱۸ ۱۸۲۳ ۱۸۲۸ ۱۸۳۳ ۱۸۳۸ ۱۸۴۳ ۱۸۴۸ ۱۸۵۳ ۱۸۵۸ ۱۸۶۳ ۱۸۶۸ ۱۸۷۳ ۱۸۷۸ ۱۸۸۳ ۱۸۸۸ ۱۸۹۳ ۱۸۹۸ ۱۹۰۳ ۱۹۰۸ ۱۹۱۳ ۱۹۱۸ ۱۹۲۳ ۱۹۲۸ ۱۹۳۳ ۱۹۳۸ ۱۹۴۳ ۱۹۴۸ ۱۹۵۳ ۱۹۵۸ ۱۹۶۳ ۱۹۶۸ ۱۹۷۳ ۱۹۷۸ ۱۹۸۳ ۱۹۸۸ ۱۹۹۳ ۱۹۹۸ ۲۰۰۳ ۲۰۰۸ ۲۰۱۳ ۲۰۱۸ ۲۰۲۳ ۲۰۲۸ ۲۰۳۳ ۲۰۳۸ ۲۰۴۳ ۲۰۴۸ ۲۰۵۳ ۲۰۵۸ ۲۰۶۳ ۲۰۶۸ ۲۰۷۳ ۲۰۷۸ ۲۰۸۳ ۲۰۸۸ ۲۰۹۳ ۲۰۹۸ ۲۱۰۳ ۲۱۰۸ ۲۱۱۳ ۲۱۱۸ ۲۱۲۳ ۲۱۲۸ ۲۱۳۳ ۲۱۳۸ ۲۱۴۳ ۲۱۴۸ ۲۱۵۳ ۲۱۵۸ ۲۱۶۳ ۲۱۶۸ ۲۱۷۳ ۲۱۷۸ ۲۱۸۳ ۲۱۸۸ ۲۱۹۳ ۲۱۹۸ ۲۲۰۳ ۲۲۰۸ ۲۲۱۳ ۲۲۱۸ ۲۲۲۳ ۲۲۲۸ ۲۲۳۳ ۲۲۳۸ ۲۲۴۳ ۲۲۴۸ ۲۲۵۳ ۲۲۵۸ ۲۲۶۳ ۲۲۶۸ ۲۲۷۳ ۲۲۷۸ ۲۲۸۳ ۲۲۸۸ ۲۲۹۳ ۲۲۹۸ ۲۳۰۳ ۲۳۰۸ ۲۳۱۳ ۲۳۱۸ ۲۳۲۳ ۲۳۲۸ ۲۳۳۳ ۲۳۳۸ ۲۳۴۳ ۲۳۴۸ ۲۳۵۳ ۲۳۵۸ ۲۳۶۳ ۲۳۶۸ ۲۳۷۳ ۲۳۷۸ ۲۳۸۳ ۲۳۸۸ ۲۳۹۳ ۲۳۹۸ ۲۴۰۳ ۲۴۰۸ ۲۴۱۳ ۲۴۱۸ ۲۴۲۳ ۲۴۲۸ ۲۴۳۳ ۲۴۳۸ ۲۴۴۳ ۲۴۴۸ ۲۴۵۳ ۲۴۵۸ ۲۴۶۳ ۲۴۶۸ ۲۴۷۳ ۲۴۷

[Math. Trip.]

مثال ۶ - بتاریخ ۱۵ اور ۱۶ اپریل ۱۹۵۷ء کو جو کونج اوسط ظہری وقت کی مساوات ۱۵، ۱۶ اور ۱۷ ہے جن کو علی الترتیب اوسط وقت میں سے تفریق اور اس میں جمع کرنا ہے۔ سورج کا ظاہری ساعتی زاویہ ایک مقام پر جو کونج سے ۴۸° مشرق میں ہے بتاریخ ۱۶ اپریل مقامی اوسط وقت ۵:۵۸ [Coll. Exam.] پر معلوم کرو۔

[Coll. Exam.]

۶۔ وقت کی مساوات کی ترمیمی تعبیر۔

دفعہ ۴، سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر وقت کی مساوات و کو
اوسط شمسی وقت کے گھنٹوں میں بیان کیا جائے تو وہ کافی تقرب تک

$$12 = \{2 \text{ زجب (ل - ح) - میس } \frac{1}{4} \text{ سه جب ۲ ل}\} \{2\}$$

ماصل ہوتی ہے۔ اس جملہ میں حسب ذیل تقریری اندراجات

میں ۱/۳ = ۲۳/۳۱ = ۱/۴ = ۵۹/۷۱ = ۳۶/۴۹

کرنے سے تحویل کے بعد (یا راست ضابطہ (۱) سے صفحہ ۳۶) حاصل ہوتا ہے

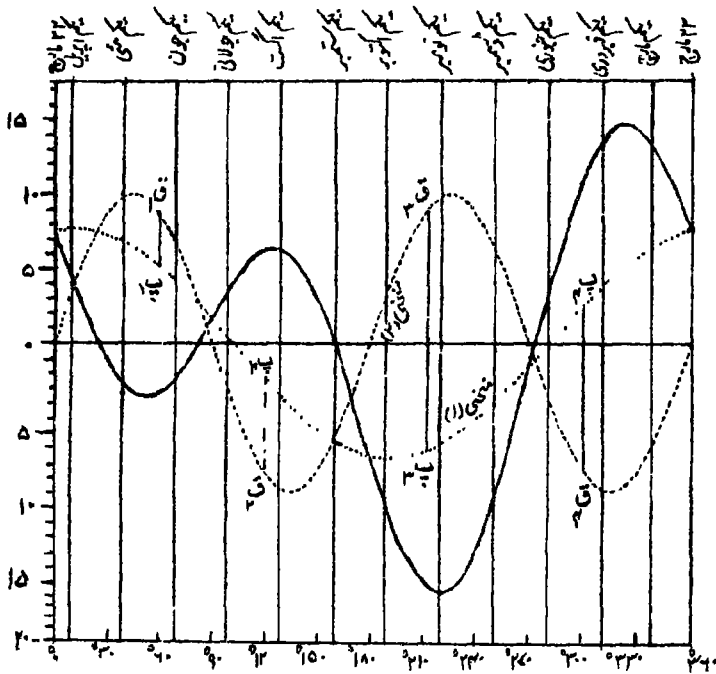
و ۱۲۸۰ گ جب (۱ + ۲۹) - ۱۶۵ گ جب ۲ ل

$$28, 29 \text{ جب } (29 + 1) = 30, 31 \text{ جب } 2$$

اب ہم وہ دو منحنی مرتسم کرتے ہیں (شکل ۶۶) جن کی مساواتیں

$m_{24} = m_{24} \text{ يجب } (24 + 1) \dots \dots \dots (1)$

اور 90° جب 2° (۲)
ہیں۔ شکل میں 1° کو فصلہ کے طور پر لیا گیا ہے اور معین مثبت یا منفی لیے گئے
ہیں جیسا کہ بائیں جانب کے اس کھڑے خط سے ظاہر ہے جس پر پچانہ درج
ہے۔ صفر سے لیکر 360° تک ہر طول بلد کے لیے یہ منحنی مرتسم کیے جاتے ہیں
(۲۳۷) اور اس لیے یہ ایک سال کے اعتدال ربیع سے دوسرے سال کے اعتدال
ربیع تک کا رآمد ہیں۔ شکل بغیر کسی قابل قدر تغیر و تبدل کے سالہا
سال تک استعمال کی جاسکتی ہے۔



شکل (۶۶)

منحنیوں کا استعمال اس واقعہ پر مبنی ہوتا ہے کہ وقت کی مساوات
= منحنی (۱) کا معین - منحنی (۲) کا معین

معمولی قسار داد کی بموجب یہاں یہ سمجھ لیا گیا ہے کہ افقی محور کے اوپر معین مثبت ہیں اور اس کے نیچے منفی۔

مثلاً ۲۲ مئی کو وقت کی مساوات ق. چپا ہے اور منفی ہے۔
۲۲ جولائی کو وقت کی مساوات ق. چپا ہے اور مثبت ہے۔ ۲۲
اکتوبر کو وہ ق. چپا ہے اور منفی ۲۲ جنوری کو ق. چپا ہے اور
مثبت۔

اس طریقہ پر پانچویں (۱) اور (۲) کے ٹیٹوں کا فرق اس کی بنا
علامت کے ساتھ لیکر ایسے معین قرار دیں تو شکل ۶۶ کا وہ مسلسل منحنی حاصل
ہوتا ہے جس کے معین وقت کی مساوات کو سال کے ہر دن کے لیے
تعبیر کرتے ہیں۔

شکل (۶۶) میں چار مقامات ایسے ہیں جن پر منحنی (۱) اور (۲) متقاطع
ہوتے ہیں اور اس لیے ان مقامات پر وقت کی مساوات صفر ہے۔ پس
یہ معلوم ہوا کہ وقت کی مساوات سال میں چار دفعہ معدوم ہوتی ہے اور
مسلسل منفی افقی محور کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے جن سے متناظر تانہ ٹیٹوں معلوم
ہوتی ہیں۔ (۲۳۸)

یہ امر کہ وقت کی مساوات سال میں کم از کم چار دفعہ معدوم ہوتی
چاہئے دوسرے طریقہ سے بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔ ہم فرض کریں گے
کہ ت وقت کی مساوات کا وہ حصہ ہے جو گرینیش آسمان کے میلان کی
وجہ سے ہے اور ت وہ حصہ ہے جو خورج اور زکی وجہ سے ہے۔ فرض
کر کہ بنا لحاظ علامت ت کی بڑی سے بڑی قیمت ک ہے تب ک ت
کی کسی قیمت سے بڑا ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ک کی قیمت ۹۰ و ۹۰ ہے اور
ت ۶۸ و ۷۰ سے بڑا نہیں ہو سکتا۔

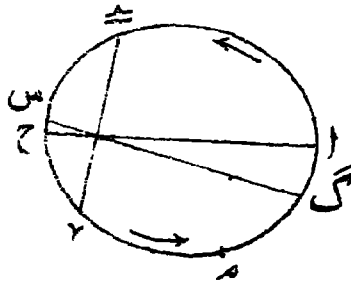
اعتدال رجب سے انقلاب گرما تک ت منفی ہونا چاہئے کیونکہ
جہاں تک کہ میلان کی وجہ سے نامساویت پیدا ہوتی ہے اوسط سورج کا
صعود مستقیم اصل سورج کے صعود مستقیم سے بڑا ہوتا ہے۔ اس لیے

اوسط سورج نصف النہار کو اصلی سورج کے بعد عبور کرتا ہے اور اس لیے اوسط وقت معلوم کرنے کے لیے ظاہری وقت میں عمل تفریق کرنا ہوتا ہے۔ اسی طرح کے استدلال سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ انقلاب گرما سے اعتدال خریف تک ت ثابت ہے، اعتدال خریف سے انقلاب سرما تک ت منفی ہے، اور انقلاب سرما سے اعتدال ربيع تک ت مثبت ہے۔ دونوں اعتدال اور دونوں انقلابوں پر ت صفر ہے۔ وقت کی مساوات کے اس حصہ کے متعلق دو خردین المہر کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ بعید ارضی (Apogee) اور قریب ارضی (Perigee) دونوں پر ت صفر ہے اور چونکہ قریب ارضی سے بعید ارضی تک اصلی سورج اپنے اوسط مقام سے آگے رہتا ہے اس لیے ت کی قیمت مسلسل مثبت ہونی چاہیے اسی طرح بعید ارضی سے قریب ارضی تک تمام راستہ پر ت منفی ہونا چاہیے فرض کرو کہ قریب ارضی اور بعید ارضی علی الترتیب ح (شکل ۶) ہیں، انقلاب گرما اور سرما پر سورج کے محل گ، س ہیں اور اعتدالی نقطے

۲۔ یہاں۔
فرض کرو کہ ہ وہ نقطہ ہے جہاں سورج اس آن رہتا ہے جبکہ ت (جو ۲ پر اور گ پر صفر ہے) اپنی بڑی سے بڑی منفی قیمت رکھتا ہے۔ اب چونکہ وقت کی مساوات ت + ت ہے ہم دیکھتے ہیں کہ ح سے ۲ تک و کی قیمت مسلسل مثبت ہونی چاہیے کیونکہ ت اور ت دونوں مثبت ہیں۔

نقطہ ہ پر و = ت۔ ت اور چونکہ ت کبھی بھی ک کے مساوی نہیں ہو سکتا اس لیے ہ پر و کو منفی ہونا چاہیے۔ اب چونکہ و ۲ پر مثبت ہے، ہ پر منفی اور پھر گ پر مثبت اس لیے ۲ اور ہ کے درمیان کوئی ایک نقطہ اور ہ اور گ کے درمیان ایک دوسرا نقطہ ہونا چاہیے جہاں و = ۰۔ پس وقت کی مساوات، اعتدال ربيع اور انقلاب گرما کے درمیان کم از کم دو مرتبہ صفر ہونی چاہیے۔

گ سے ایک ت اور ت دونوں مثبت ہیں اور اس لیے انقلاب
گرماء سے بعید ارضی تک و مسلسل مثبت ہوتا ہے۔ لیکن ا سے ہے
ت منفی ہے اور چونکہ ہے ت صفر ہے اور ت اب بھی منفی
ہے اس لیے و ہے پر منفی اور ا پر مثبت ہونا چاہئے۔ پس نتیجہ
نکلتا ہے کہ و ا اور ہے کے درمیان کسی ایک نقطہ پر صفر ہونا چاہئے
اور اس طرح وقت کی مساوات کم از کم پھر ایک مرتبہ بعید ارضی اور اعتدال
خریف کے درمیان صفر ہونی چاہئے۔



شکل (۶۷)

س سے س تک ت اور ت مسلسل منفی ہیں اور اس لیے
وقت کی مساوات مدار کے ان نقطوں پر معدوم نہیں ہوسکتی۔ آ پھر و
پھر مثبت ہو جاتا ہے اور اس لیے وہ س اور آ کے درمیان کم از کم
ایک مرتبہ صفر ہونا چاہئے۔

پس معلوم ہوا کہ وقت کی مساوات اعتدال و انقلاب
گرماء کے درمیان کم از کم دو مرتبہ صفر ہونی چاہئے: بعید ارضی اور خریف
کے درمیان کم از کم ایک مرتبہ اور انقلاب گرماء اور قریب ارضی کے درمیان
کم از کم ایک مرتبہ۔
مثال: اگر ہم لاکھ سورج کے اوسط طول بلد کاہ سے سمجھیں تو

بتاؤ کہ وہ دن جن میں وقت کی مساوات صفر ہوتی ہے منحنی $ما = لا (۱ + لا^۲)$ اور ایک خط مستقیم کے نقاط تقاطع سے تقریبی طور پر معلوم کیے جاسکتے ہیں، اور اگر اس خط کی مساوات

$$ما = لا + ۰.۰۰۰۳۸$$

ہو تو زیر بحث ایام کی تخمین تقریبی طور پر کرو۔

مساوات مس^۲ $\frac{۱}{۲}$ سہ جب $۲ = ل$ ز جب $(ل - ح)$ میں
مس $ل = لا$ رکھو تو $لا$ میں محصلہ مساوات صریحاً ان دو مساواتوں
 $ما = ز لا$ جم $ح$ مم $\frac{۱}{۲}$ سہ - ز جب $ح$ مم $\frac{۱}{۲}$ سہ

$$ما = لا (۱ + لا^۲)$$

سے ماکو ساقط کرنے کا نتیجہ ہے۔

مثال ۲ - یہ بتایا جا چکا ہے کہ وقت کی مساوات ثانیوں میں

$$۹۰ \text{ جب } ل + ۴۵۲ \text{ جم } ل - ۵۹۲ \text{ جب } ۲ ل$$

ہے جہاں $ل$ ، سورج کا اوسط طول بلد ہے۔ اس جملہ سے ثابت کرو کہ وقت (۲۴۰)

کی مساوات سال میں کم از کم چار دفعہ معدوم ہوتی ہے۔
اگر ہم اس جملہ میں $ل$ کی بجائے ۵۰ ، ۵۰ کے بعد دیگرے رکھیں تو اسکی
علامت مثبت سے منفی میں تبدیل ہوتی ہے، اس لیے ۵۰ اور ۵۰ کے درمیان
 $ل$ کی ایک ایسی قیمت ہونی چاہئے جو مساوات

$$۹۰ \text{ جب } ل + ۴۵۲ \text{ جم } ل - ۵۹۲ \text{ جب } ۲ ل = ۰$$

کی ایک اصل ہو۔

نیز ۴۵ اور ۹۰ کے درمیان، ۹۰ اور ۱۸۰ کے درمیان، اور ۱۸۰ اور ۳۶۰
کے درمیان $ل$ کی قیمتوں کے لیے علامت کی فرید تبدیلیاں ہیں۔ اس لیے
مساوات بالا کی چار حقیقی اصلیں ہونی چاہئیں اور جب چند دیگر چھوٹی قیمتیں
بھی ملحوظ رکھیں، انہیں تو یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ اصلیں تقریباً

$$۲۳، ۸۳، ۱۵۹، ۲۷۲$$

$$+ \text{جب ل جب ل} + \text{جب ل جب ل} + \text{جب ل جب ل} =$$

مثال ۴۔ اگر زمین کے مدار کا خروج مرکز $\frac{1}{4}$ ہو، طریق الشمس کے

میلان کی جیب التمام $\frac{11}{12}$ ، اور اعتدالین کے خط کو محور اعظم پر عمود لیا جائے تو ثابت کرو کہ جب وقت کی مساوات، خروج مرکز، اور میلان دونوں کی وجہ سے عدد اعظم ہوتی ہے تو سورج کے طول بلد وہ زاویے ہیں جن کی جیب بتقریباً ۵۶.۹۰

[Math. Trip. 1.]

اور ۵۸.۹۰ ہیں۔

وقت کی مساوات ہے

$$۲ \text{ جب ل} - \text{ل} - \text{س} = \frac{1}{4} \text{ جب ل}$$

یہ ۹۰ کے لیے اعظم ہوتی ہے جبکہ

$$۲ \text{ جب ل} - \text{ل} - \text{س} = \frac{1}{4} \text{ جب ل}$$

دئے ہوئے مستقل درج کرنے سے یہ مساوات $\frac{1}{4}$ جب ل - $\frac{1}{4}$ جب ل = ہوئی ہے اس لیے جب ل میں ایک درجہ مساوات مائل ہوتی ہے جس کی اصلیں دئے ہوئے اعداد ہیں۔

۷۔ وقت کی مقیم مساوات کی عام تحقیق۔ (۲۷۱)

اب ہم طریق الشمس کے میلان یا زمین کے مدار کے خروج مرکز کی بابت کوئی مفروضہ قائم کیے بغیرہ معلوم کریں گے کہ وقت کی مساوات کب اعظم یا اقل ہوتی ہے۔ لیکن ہم یہ فرض کریں گے کہ سورج کے گرد زمین کی حرکت ایک ثابت قطع ناقص میں واقع ہوتی ہے اور خط استواء کی حرکت نظر انداز کی گئی ہے۔ دفعہ ۵۲ سے ضروری مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اور وہ حسب ذیل ہیں:

$$\text{س} - \text{و} = \text{ل} - \text{ز} \text{ جب ل} - \text{ل} - \text{س} = \frac{1}{4} \text{ جب ل}$$

$$\text{س} - \text{و} = \text{ل} - \text{ز} \text{ جب ل} - \text{ل} - \text{س} = \frac{1}{4} \text{ جب ل}$$

جہاں اصلی اوسط اور خروج المرکز ہی بے قاعد گئیاں و ط، و ہیں اور سورج کا اصلی طول بلد ۵۰ ہے مدار کا خروج المرکز ز اور خضیض کا طول بلد ۵۰۔ وقت کے لحاظ سے ان مساواتوں کو تفریق کرنے سے

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{\text{فرع}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}$$

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}$$

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}$$

وقت کی مساوات سورج کے اوسط طول بلد (ط + ۵) کو اس کے صعود و مستقیم ۵۰ میں سے تفریق کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور جب وقت کی مساوات مقیم ہوتی ہے تو ت کے لحاظ سے اس کا تفریق سر صفر ہوتا ہے اس لیے

$$\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}$$

یا تفریق سروں کے اسقاط سے

$$(۱-ز) \text{ جم } ۵ = \text{ جم } ۵ \text{ جب } ۵ = ۱-ز \text{ جم } ۵$$

قطع ناقص کی ہندسی خاصیتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$(۱-ز) = (۱-ز) \text{ جم } ۵ = \{۱+ز \text{ جم } ۵\} - ۵$$

اس لیے

$$(۱-ز) \text{ جم } ۵ = \text{ جم } ۵ \text{ جب } ۵ = \{۱+ز \text{ جم } ۵\} - ۵$$

اس ضابطہ میں ز کی مقدار پر کوئی قید نہیں ہے اور یہ ۵ کی تعیین کے لیے ایک عام مساوات ہے جبکہ وقت کی مساوات مقیم ہو۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ وقت کی مساوات کی مقیم قیمتیں اس وقت

واقع ہوتی ہیں جبکہ سورج کے سمتی قطر کا ظل خط استواء کے مستوی پر اوسط فاصلہ کا (۱-ز) $\frac{1}{2}$ (جم سہ) گنا ہو جہاں ز مدار کا خروج المرکز اور سہ طرقت الشمس کا

میلان ہے۔

فرض کرو کہ یہ ظل غہ ہے، تب اگر سورج کا میل ضہ ہو تو

$$\text{غہ} = \frac{1}{2} (۱-ز) (\text{جم ضہ}) \{ ۱ + ز (\text{جم } \odot - \text{حہ}) \}$$

$$\text{لیکن جم ضہ} = (\text{جم } \odot + \text{جم }^2 \text{ سہ جب }^2 \odot)$$

اور اوپر جو ثابت ہو چکا ہے اُس سے

$$\frac{\frac{1}{2} (\text{جم } \odot + \text{جم }^2 \text{ سہ جب }^2 \odot)}{۱ + ز (\text{جم } \odot - \text{حہ})} = \frac{\frac{1}{2} (\text{جم سہ})}{\frac{1}{2} (۱-ز)}$$

$$\text{اس لیے غہ} = \frac{1}{2} (۱-ز) (\text{جم سہ})$$

مثال ۲۔ فرض کرو کہ زمین کے لحاظ سے سورج کا طرقت ٹھیک ایک قطع ناقص ہے جس کے ایک پاسک پر زمین ہے۔ فرض کرو کہ اس قطع ناقص کا ظل خط استواء کے مستوی پر لیکر ایک دوسرا قطع ناقص حاصل کیا گیا ہے۔ تب سورج کے محل کے ظل جبکہ وقت کی مساوات بڑی سے بڑی ہو اس دوسرے قطع ناقص اور ایک دائرہ کے نقاط تقاطع ہیں جس کا مرکز زمین ہے اور جس کا رقبہ اس قطع ناقص کے رقبہ کے مساوی ہے۔

مثال ۳۔ عام صورت میں ثابت کرو کہ خروج المرکز خواہ کچھ ہی ہو مرکز کی مساوات اعظم ہوتی ہے جبکہ سمتی قطر، محور اعظم اور محور اصغر کے درمیان اوسط ہندسی ہو۔

۷۸۔ موسموں کا سبب -

سموات میں سورج کا ظاہری سالانہ راستہ اعتدالی اور انقلابی نقطوں سے

چار ربعوں میں تقسیم ہے۔ ان کے جواب میں وقت کے جو چار وقفے ہیں ان کو موسم بہار، گرما، خریف اور سرما کہتے ہیں۔ بہار شروع ہوتا ہے جبکہ سورج راس الحمل میں داخل ہوتا ہے یعنی جبکہ اس کا طول بلد صفر ہے۔ جب سورج انقلابی نقطہ (طول بلد = ۹۰°) پر پہنچتا ہے تو گرما کا آغاز ہوتا ہے۔ موسم خریف شروع ہوتا ہے جبکہ سورج راس المیزان (طول بلد = ۹۰°) میں داخل ہوتا ہے۔ سرما کا آغاز اس وقت ہوتا ہے جبکہ سورج کا طول بلد ۰° ہوتا ہے اور اس کا انتقام اس وقت جبکہ سورج پھر راس الحمل میں داخل ہوتا ہے۔

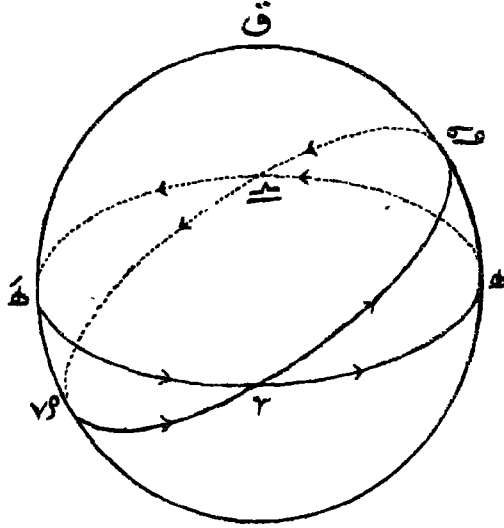
زمین کے کوڑھ ہوائی کے جو تباہی حالات میں تبدیلیاں جو اس نظر کا سبب ہیں جس کو موسموں کا تغیر کہتے ہیں خاص کر ان تبدیلیوں سے متعین کجانی ہیں جو سورج سے پہنچنے والی حرارت کی مقدار میں واقع ہوتی ہیں جیسے جیسے سال آگے بڑھتا ہے۔

حرارت کی مقدار جو سورج سے زمین کی سطح پر کے کسی مقام پر پہنچتی ہے دو چیزوں پر منحصر ہوتی ہے (۱) گھنٹوں کی اس تعداد جن میں سورج افق کے اوپر رہتا ہے اور (۲) بوقت ظہر سورج کے راسی فاصلہ ایک ایسے مقام پر جو عرض بلد فہ میں واقع ہے طلوع آفتاب سے خروبا آفتاب تک وقفہ ۲۲° ۵۷' ہے یہاں یہ تخم قہری زاویوں میں وہ زاویہ ہے جو مساوی جم ۵۷° = مس ۹۰° - مس ۳۲° ۵۷' ہے۔

(۲۴۳)

سے حاصل ہوتا ہے سورج کا راسی فاصلہ بوقت ظہر فہ ۵۷° ہے اور فہ اس کا میل ہے۔

جب سورج طریق الشمس پر راس الحمل کے نقطہ سے حرکت کرتا ہے تو اس کا میل مثبت ہوتا ہے (دیکھو شکل ۶۸) اور جب سورج سرطان کے پہلے نقطہ پر جس کی علامت ہے پہنچتا ہے تو یہ میل انقلاب گرما پر اعظم قیمت اختیار کرتا ہے اس وقت اس کا میل طریق الشمس کے میلان کے مساوی ہوتا ہے یعنی ۲۳° ۲۷'۔ اس نقطہ سے شمسی میل گھٹنے لگتا ہے تا آنکہ



شکل (۶۸)

اعتدال خریف \approx پر صفر ہوتا ہے۔ اعتدال خریف سے میل شفی ہو جاتا ہے اور گھٹنے گھٹتے جدی میں جس کی علامت ♋ ہے انقلاب سر پر اسل (۲۳° ۴۷') ہوتا ہے اور اس کے بعد پھر ایک مرتبہ بڑھنے لگتا ہے اور اگلے اعتدال پر پھر معدوم ہوتا ہے۔

موسمی تبدیلیوں پر غور کرنے کے لیے زمین کی سطح کو پانچ منطقات میں تقسیم کرنا سہولت بخش ہے۔ یہ منطقات خط استوا کے متوازی دائروں سے محدود ہوتے ہیں جو عرض بلد $۲۳^\circ ۴۷'$ اور $۶۶^\circ ۳۳'$ میں واقع ہیں۔ وہ منطقہ جو خط استوا کے شمال اور جنوب میں $۲۳^\circ ۴۷'$ کے توازیوں کے درمیان ہے منطقہ حارہ کہلاتا ہے اور اس کو محدود کرنے والے شمالی اور جنوبی دائرے خط سرطان اور خط جدی کہلاتے ہیں۔ شمال اور جنوب میں عرض بلد $۶۶^\circ ۳۳'$ کے توازی دائرہ قطب شمالی اور دائرہ قطب جنوبی کہلاتے ہیں۔ وہ منطقہ جو دائرہ قطب شمالی اور خط سرطان

درمیان ہر منطقہ معتدلہ شمالی کہلاتا ہے اور وہ جو دائرہ قطب جنوبی اور خط جدی کے درمیان ہے منطقہ معتدلہ جنوبی کہلاتا ہے۔ بالآخر وہ علاقے جو قطب شمالی اور قطب جنوبی کے گرد دائرہ قطب شمالی اور دائرہ قطب جنوبی سے محدود ہیں منطقہ منجمد شمالی اور منطقہ منجمد جنوبی کہلاتے ہیں۔

انقلاب گرما کے وقت $۲۳^{\circ} ۴۷'$ اور اس لیے دائرہ قطب شمالی کے کسی نقطہ کے لیے مس نہ مس نہ $= ۱$ ۔ ان حالات کے تحت سورج کا ساعتی زاویہ طلوع اور غروب پر ۹۰° ہے یعنی سورج کا یومی راستہ اس وقت خط استواء کے متوازی ایک دائرہ ہے جو افق کو نقطہ شمالی پر مس کرتا ہے اس لیے نیم شب پر اس کی قوس کا نصف حصہ نظر آئے گا (ہم یہاں انعطاف کے اثر کو ملحوظ نہیں رکھ رہے ہیں)۔ شاید جیسے جیسے قطب کی طرف بڑھیں گے منطقہ منجمد کے اندر سورج بغیر غروب ہوئے متعدد ایام تک افق کے اوپر رہے گا۔ خود قطب پر مشاہد کو سورج بوقت اعتدال افق کے گرد حرکت کرتا نظر آئے گا اور اعتدال کے بعد وہ آسمان کے گرد گرد ایک لولب منقسم کرے گا اور افق کے اوپر اس کا ارتفاع بند رہیج بڑھتا جائے گا تا آنکہ بوقت انقلاب اس کا یومی راستہ $۲۳^{\circ} ۴۷'$ کے ارتفاع پر افق کے متوازی تقریباً ایک دائرہ ہو گا۔ انقلاب کے بعد وہ افق کی جانب ایک مشاہد لولب منحنی میں واپس ہو گا اور افق پر اعتدال خریف کے وقت پہنچے گا۔ موسم سرما میں نصف سال تک سورج مسلسل افق کے نیچے رہے گا۔

منطقہ معتدلہ جنوبی اور منطقہ منجمد جنوبی میں مظاہر متناظر شمالی منطقوں کے مظاہر کے مشابہ ہوں گے لیکن ان کا وقوع سال کے مخالف زمانوں میں ہو گا۔ مثلاً جنوبی نیم کرہ ارض کا موسم بہار وقت کے نکتہ نظر سے شمالی نیم کرہ کے موسم خریف کے ہم زمان ہو گا اسی طرح جنوب کا سرما شمال کے گرما اور شمال کا سرما جنوب کے گرما کے ہم زمان ہو گا۔

منطقہ مارہ میں حالات حسب ذیل ہوتے ہیں : خط استوا پر چونکہ $۰ =$ اس لیے (۱) سے $۹۰ =$ خواہ ضہ کی قیمت کچھ ہی ہو۔ ایسے $۹۰ = \frac{1}{4} \times 360$ یعنی دن کا طول پورے سال ۱۲ گھنٹہ رہتا ہے۔ لیکن سورج کا نصف النہاری راسی فاصلہ دن بہ دن متغیر ہوگا۔ اعتدال ربیع پر سورج کا نصف النہاری راسی فاصلہ تقریباً صفر کے مساوی ہوگا (یہ ٹھیک صفر کے مساوی ہوگا اگر سورج اس مقام کے نصف النہار کو اس وقت عبور کرے جبکہ وہ راس الحمل کے نقطہ میں سے گذر رہا ہو)۔ جب موسم بہار شروع ہو کر پہنچے آگست ہے یہ نصف النہاری راسی فاصلہ انقلاب تک بتدریج بڑھے گا اور انقلاب کے وقت سورج کا تکبذ تقریباً راس کے $۲۳^{\circ} ۲۷'$ شمال میں واقع ہوگا۔ اعتدال خریف پر سورج پھر پھر وقت ظہر تقریباً راس میں سے گذرے گا اور انقلاب سرما پر راس کے $۲۳^{\circ} ۲۷'$ جنوب میں تکبذ کرے گا۔ ان مقامات پر جو خط استوا اور خط جدی یا خط سرطان کے درمیان واقع ہیں حرارت کی مقدار جو سورج سے پہنچنے کی سال میں دو مرتبہ اعظم قیمت اختیار کرے گی اور اس وقت سورج کا میل اس مقام کے عرض البلد کے مساوی ہوگا یہاں ہم نے صرف اس حد تک غور کیا ہے جس حد تک ظہر پر سورج کے راسی فاصلہ کے اثر کا تعلق ہے۔

اگرچہ وہ چار حصے جن میں طوق الشمس کا بڑا دائرہ اعتدالوں اور انقلابوں سے تقسیم ہوا ہے طول میں مساوی ہیں لیکن ان حصوں کو طے کرنے میں جو وقت صرف ہوتا ہے وہ مساوی نہیں ہوتے۔

مومنوں کی مدتیں معلوم کرنے کے لیے دفعہ ۳ کی مساوات (۳) استعمال ہوتی ہے جو سورج کے اوسط طول بلد اور اصلی طول بلد کے درمیان ایک رشتہ ہے یعنی

ل = $۵ - ۲$ ز جب $(۵ - ۲) + \frac{۳}{۲}$ ز جب $(۵ - ۲)$ (ص)
ہم اپنے موجودہ مقصد کے لیے اس جملہ کی تیسری رقم کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور صرف یہ لکھ سکتے ہیں

ل = ۵ - ۲ ز جب (۵ - ح)
جب سورج ۲ میں ہو تو ۵ = اور اس آن سورج کے اوسط
طول بلد کوئی سے تعبیر کرنے سے

ل = ۲ ز جب ح
اسی طرح انقلاب گرما، اعتدال خریف، انقلاب سرما اور پھر آئینوں
اعتدال ربیع پر سورج کے اوسط طول بلدوں کو علی الترتیب ل، ل، ل، ل
سے تعبیر کریں تو

$$ل = \frac{1}{4} \pi - ۲ ز \text{ جم ح}$$

$$ل = \pi - ۲ ز \text{ جب ح}$$

$$ل = \frac{3}{4} \pi + ۲ ز \text{ جم ح}$$

$$ل = \pi + ۲ ز \text{ جب ح}$$

موسموں کی متقیں ان پانچ اوسط طول بلدوں میں سے ہر متصلہ
زوج کے درمیان جو فرق ہے اُس کو جزو ضربی ۲۴، ۶۵، ۳، ۲۲ سے
ضرب دینے سے معلوم ہوتی ہیں۔ اس جزو ضربی کی بجائے گ لکھنے
سے شمالی نیم کرہ ارض کے لیے حاصل ہوتا ہے :-

دنوں کی تعداد

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{بہار میں} = گ (ل - ل) = ۹۱۵۳۱۰ - ۲ ز گ (جب ح + جم ح) \\ \text{گرمایں} = ک (ل - ل) = ۹۱۵۳۱۰ - ۲ ز ک (جب ح - جم ح) \\ \text{خریف میں} = ک (ل - ل) = ۹۱۵۳۱۰ + ۲ ز ک (جب ح + جم ح) \\ \text{سرما میں} = گ (ل - ل) = ۹۱۵۳۱۰ + ۲ ز گ (جب ح - جم ح) \end{array} \right. \quad (۱)$$

ز اور حہ کی وہ قیمتیں رکھنے سے جو دفعہ ۷۳ میں دی گئی ہیں حاصل ہوتا ہے

۲ زگ جب حہ = ۱۶۹۱۰ دن

۲ زگ جم حہ = ۰۶۳۷۹۴

اور

اس لیے ان چار موسموں کی مدتیں حسب ذیل ہیں

دن گھنٹے

۲۰۶۲ ۹۲ بہار

۱۳۶۳ ۹۳ گرما

۱۸۶۷ ۸۹ خریف

۰۶۵ ۸۹ سرما

پس ہم دیکھتے ہیں کہ موسم گرما اور بہار باہم ۱۸۶ دن ۱۰۶ گھنٹے رہتے ہیں لیکن موسم خریف اور سرما کے باہم صرف ۱۷۸ دن ۱۹ گھنٹے ہوتے ہیں۔ اس کی اتنی صورت جنوبی نیم کرہ میں ہوتی ہے وہاں موسم گرما اور بہار باہم ۱۷۸ دن ۱۹ گھنٹوں کے ہوتے ہیں اور موسم خریف اور سرما باہم ۱۸۶ دن ۱۰۶ گھنٹوں کے۔

مثال ۱۔ یہ مانکر کہ وہ یکساں طور پر بڑھتا ہے ثابت کرو کہ آئندہ زمانہ میں چار موسموں کی مدتوں کی حسب ذیل انتہائی حدود ہوں گی:۔

$$91,310 \pm 31 \times 365 \times 24 \times 60$$

مثال ۲۔ اگر سال میں دنوں کی تعداد چھ ہو اور اگر موسم گرما بہار سے

ق دن بڑا اور خریف سے ۳۱ دن بڑا ہو تو مدار کا خروج المکز اور قریب الارضی کا طول بلد معلوم کرو۔

دسویں باب پر مثالیں

مثال ۱۔ اس مفروض پر کہ زمین کا مدار ایک تقریباً دائری قطع ناقص ہے

اور اوجین اور انفلابین کے خطوط ایک ہی طول بلد رکھتے ہیں ثابت کرو کہ خروج المکز تقریباً

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}$$

کے مساوی ہے جہاں $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ ، قریب ارضی اور بعید ارضی پر وقت کی مساوات میں
فی گھنٹہ تغیرات کو تعبیر کرتے ہیں اور $\frac{1}{2}$ سے طریق الشمس کا میلان [Math. Trip]

مثال ۲۔ کیمبرج میں ایک گھڑی گریجویٹ اوسط وقت دکھاتی ہے۔ بتاؤ کہ
اس میں کیا وقت تھا جبکہ سورج کا اگلا کنارہ بتاریخ ۶ جنوری ۱۸۵۷ء نصف النہار پر
پہنچا تھا اگر یہ دیا جائے کہ

$$\begin{aligned} & \text{کیمبرج کا طول بلد} \\ & \text{نصف النہار عبور کرنے میں جو وقت لگا} \\ & \text{وقت کی مساوات} \end{aligned}$$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ بحری جشتی کے وہ خانے جن سے سورج کے
صعود و تغیر فی گھنٹہ اور "نیم قطر کا وقت جو نصف النہار عبور کرنے میں لگتا ہے"
علوم ہوتے ہیں ایک ساتھ بڑھتے اور گھٹتے ہیں اور اول الذکر مقدار عملاتی الذکر کے مربع
کے متناسب ہوتی ہے۔ [Math. Trip. 1.]

مثال ۴۔ اگر زمین کے مدار کا خروج المکرز ہو اور اعتدالین کا خط مدار کے
محور اعظم پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ زمین ۲ سے ۱ تک اور ۱ سے ۲ تک حرکت
کرنے میں جو اوقات لیتی ہے ان کا فرق تقریباً ۴۶۵ دن ہے۔

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ مرکز کی بڑی سے بڑی مساوات ۲ + ۱۱ ز + ۳۸ ز ہے
اور جب یہ صورت ہو تو

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \\ 2. \quad & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \end{aligned}$$

حصہ اول ختم

اشاریہ

علم ہیئت کروئی

حصہ اول

نوٹ: اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے۔

اختلاف منطری زاویہ، ۱۳۸

آڈیس، کیلر کے مسئلہ کا حل، ۳۴۰

کیلر کے مسئلہ کا ترکیبی حل، ۲۳۹

لمبرٹ کے مسئلہ کا ثبوت، ۲۵۵

ارتفاع، ۱۱۹

ارض مرکزی عرض بلد، ۶۷

ارضی تاریخ خط، ۳۴۲

استعمال کروئی محدودوں کا، ۵۵

اسٹونی ہرسٹ پر مقناطیسی انصراف، ۱۲۱

استقبال، ۲۶۳

کی وجہ، ۲۷۲

کے ضابطے، ۲۷۳

عام استقبال، ۲۷۲

- مسیارومی، ۱۷۰
 اعتدال خریف، ۱۲۸
 اعتدال ربیع، ۱۲۷
 اعتدالی نقطے، ۱۲۸
 اعتدالوں کا کبوتر، ۲۶۳
 اقترانی، ۲۲۹
 البرشٹ، 'عرض بلدوں میں تغیرات'، ۳۰۲
 السمیت، ۱۱۹
 آلدس، کیلبر کے مسئلہ کو حل کرنے کے لیے جدولیں، ۲۵۱
 انعطاف، نما کرہ ہوائی کا، ۱۷۸
 انتصابی دائرہ، ۱۱۶
 انحناء ارضی نصف النہار پر، ۷۱
 انعطاف، ۷۷
 مشاہدات سے تعیین، ۱۹۳
 تفرقی مساوات کا تکمیل، ۱۸۸
 زاویہ محلی پر اثر، ۲۱۰
 دباؤ اور تپش کا اثر، ۱۹۸
 کی جدول، ۱۸۳
 اول السمیت، ۱۱۵
 اوج، ۲۳۶
 بارہما، ۱۹۹
 بحری کمپاس، ۱۲۱
 براڈ لے، کبوتر کا انکشاف، ۱۸۸
 برہن، ۱۸
 برننو، انعطاف کے نظریہ پر، ۱۸۷

سیاروی استقبال پر، ۱۷۰

بعید ارضی، ۲۳۶

باؤ شنگر، ۲۳۲

بے قاعدگی خروج المرکزی، ۲۳۶

اصلی، ۲۳۶

اوسط، ۲۳۶

بینی اور ارج کافن، ۲۱

بیگے، ۱۹

بیسل کا بینی اور ارج کا طریقہ، ۳۱

یومی اعداد، ۲۸۹

انعطاف، ۱۸۸

تاریخ خط ارضی، ۳۴۲

تسطیحی قریب، ۸۸

کے ضابطے، ۹۶

تفرق ضابطے کروی مثلث کے، ۱۹

سماوی کرہ پر ان کا استعمال، ۱۴۰

تقاطع، دو دائروں کا، ۵۱

تکبد بالائی و زیرین، ۱۱۵

سیارے کا، ۱۵۰

چاند کا، ۱۵۱

پر طول بلد کا اثر، ۱۵۴

راس الحمل کے، ۳۲۴

ٹاؤن لی، عرض بلد میں تغیر، ۳۰۲

ثریا، ۱۰۷

جدی، سورج کا محل انقلاب سرما پر، ۳۷۵

- جغرافی عرض بلد ۶۷
 جولین کیلنڈر ۳۲۴
 جوزا (بہ) کا استقبال اور کیو ۲۹۳
 چاند کا تکبیر ۱۵۲
 چیانڈلر شمالی قطب کی حرکت کی وجہ سے عرض بلد میں تغیرات ۳۰۶
 حائل قطبی ستارے ۱۱۶
 حرکتیں ذاتی ۳۰۰
 حنیض ۲۳۶
 خروج المکرز زمین کے مدار کا ۳۵۷
 خزاں موسموں کے اسباب ۳۷۳
 خط استوار ۱۱۲
 دائرہ درجہ دار بڑا ۳۸
 کا شطب ۳۹
 کامیلان ۴۹
 کے عقدے ۵۲
 دائری اجزا جو نیپٹیر کے فاصلوں میں قائم الزاویہ مثلث کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں ۷
 دب اکبر ۱۰۷
 دجاجہ ستارے کا اختلاف منظر ۲۰۹
 درجہ دار بڑا دائرہ ۳۸
 کا شطب ۳۹
 کامیلان ۴۹
 کے عقدے ۵۲
 مداراتارے کی ناقصی حرکت ۲۵۲
 ڈیبر تیشلات ۱۲
 دیوسس فریخ کا قمر ۲۳۳

ذاتی حرکتیں ستاروں کی، ۳۰۰

راس الحمل، ۱۲۷

سکی حرکت، ۲۵۸

کاموسموں سے تعلق، ۳۱۲

راس، ۱۱۱

راسی فاصلہ، ۱۱۹

راسی فاصلے، میل اور ساعتی زاویہ سے محسوب کردہ، ۱۳۶

رامبوکیلر کا مسئلہ، ۲۴۰

ڈلمبر کی تشیلات کے لیے قاعدہ، ۱۲

ربعی مثلث، ۸

رقبے، سیاروی حرکتوں کے متعلق کپلر کا کلیہ، ۲۲۲

رفاص نوکو کا، ۱۱۱

زاویہ محصل، ۲۱۰

زاویہ محصل دوہرے تارے کا، تعریف، ۲۱۰

زمین کی شکل، ۶۵

زمین کا محور، ۶۶

کے ابعاد، ۶۶

کی گردش، ۱۳۲

کی گردش کا دور، ۱۳۳

کی استقبالی اور کبوی حرکت، ۶۶م، ۲۸۴

کے قطب کے محل میں تغیر، ۳۰۲

کی سالانہ حرکت، ۳۴۸

سال کا آغاز، ۲۹

سال کیسہ، ۳۳۴

سال کو کبھی، ۳۲۳

شمسی، ۳۲۳
 کاروباری، ۳۲۳
 ستارے، ذاتی حرکتیں، ۳۰۰
 کا تکبید، ۱۴۸
 سرطان، سورج کا محل انقلاب گریا پر، ۳۷۴
 سماک راج، خیالی کرہ سماوی کا مرکز، ۱۰۸
 سماوی خط استوار، ۱۲۹
 کرہ، ۱۰۵
 افق، ۱۱۰
 سمپسن کا ضابطہ، انعطاف کے لیے، ۱۹۵
 سورج کی ظاہری حرکت، ۲۳۴
 ستیارہ کا تکبید، ۱۵۰
 شطب، ۲۹
 شمسی سال، ۳۲۳
 شمال قطبی فاصلہ، ایک ستارے کا، ۱۲۷
 صعودی عقدہ، ۵۲
 صعود مستقیم، ۱۲۵، ۳۱۴
 ضابطہ علم مثلث کروئی کے، اساسی، ۱
 ضد شطب، ۳۹
 طریق الشمس، ۱۲۷
 طلوع، کسی جرم فلکی کا، ۱۱۳، ۱۵۷
 طول بلد، ۱۶۲
 ظاہری حرکت سورج کی، ۳۴۸
 دو ستاروں کا فاصلہ، ۱۰۷
 عرض التمام، ۱۱۶

عرض بلد، ۶۶، ۱۱۶، ۱۶۲

عقدہ، ۵۲

عکاسی، اس سے متعلق ہیئت مسئلے، ۲۲۱

غروب کسی جرم فلکی کا، ۱۱۴

غیر تابع یومی اعداد، ۲۸۹

فاصلہ دو ستاروں کا ظاہری، ۱۰۷

فالماوتھ پر متناطیسی انصاف، ۱۲۲

فرس، ۱۲۸

فولوس، مریخ کا قمر، ۲۳۳

فوکو کا رفاص، ۱۱۱

قائم الزاویہ مثلث، ۸

قریب الرضی، ۲۳۶

قدم، ۱۱۱

قطب تارہ، ۱۱۳

کا استقبال، ۲۶۴

قطب، ۱۱۲

قطب اسد چاند سے فاصلہ، ۱۷۵

قطبی فاصلہ، ۱۲۶

قمر شمس استقبال، ۲۷۱

قمر مریخ کے، ۲۳۳

قنطورس (ذاتی حرکت، ۳۰۱)

قیقاؤس (ع) کا انعطاف، ۲۰۰

کائنولی کیلبر کے مسئلے کا حل، ۲۴۰

کارہ باری سال، ۳۲۳

کبو، ۲۷۰

- کیپلر کے کھلے، ۲۲۲
 کا مسئلہ، ۲۳۹
 کرّہ نما ارض، ۶۶
 کرّہ ہوائی، ۱۹۰
 کرّہ ہوائی کا انعطاف نما، ۱۷۸
 کرّہ ہوائی کا انعطاف، ۱۷۷
 عام نظریہ، ۱۸۳
 تفرقی مساوات، ۱۸۶
 کیسینی کا ضابطہ، ۱۹۰
 سمپسن کا ضابطہ، ۱۹۵
 براڈے کا ضابطہ، ۱۹۷
 مشاہدہ سے معلوم کرنا، ۱۹۹
 ساعتی زاوے اور میل پر اثر، ۲۰۳
 ظاہری فاصلہ پر اثر، ۲۰۵
 دوسرے تارے پر اثر، ۲۱۰
 کرّہ مساوی، ۱۰۶
 پر پڑے دائرے، ۱۱۲
 کے قطب، ۱۱۳
 پر محدودوں کے نظام، ۱۱۹
 کرّوی مثلث، ۱
 عام ضابطے، ۱
 ڈلبیر کی تمثیلات، ۱۲
 نیپیر کی تمثیلات، ۱۵
 تفرقی ضابطے، ۱۹
 ربی مثلث، ۸

کلارک زمین کے ابعاد '۶۶، ۷۱
 کلے نیوٹن کے '۲۲۴
 کوکبی وقت '۱۳۳
 کوکبی وقت سے اوسط وقت معلوم کرنا '۳۳۸
 کوکبی یوم '۱۳۲
 سال '۲۲۳
 کوٹنر، عرض بلد میں تغیرات '۳۰۲
 کیکشاں '۱۷۴
 کیلنڈر گری گوری کا '۳۲۴
 جولین '۳۲۴
 کیمبرج، اس کے ارض مرکزی عرض بلد کو محسوب کیا گیا '۷۰
 کیسینی کرہ ہوائی کا انعطاف کا نظریہ '۱۹۰
 کبوتقا طیسی انصراف '۱۲۱
 گائوس کی متنبہات '۱۲
 گردش زمین کی '۱۳۲
 گری گوری کا کیلنڈر '۳۳۴
 گلاڈسٹون اور ڈیل کا کلیہ '۱۸۸
 گھڑی پستی '۳۱۱
 لیویری کا قاعدہ کیلبر کے مسئلے کے حل کے لیے '۲۵۰
 متوازی دائرے '۱۱۳
 محور زمین کا '۶۶
 مدت دوران '۲۲۳
 مدار '۲۲۲
 مرکیٹر کا غلغلہ '۸۱
 کے ہم شکل ہونے کا ثبوت '۸۲
 مساوی المیلان کا '۷۷

اس سے تسلیمی غیل اخذ کرنا، ۹۳

مرکزی مساوات، ۳۵۴

مردورسی جرم فلکی کا، ۱۱۵

مشتری کا تلبہ، ۱۵۰

موسم، ۳۷۳

میل، ۱۲۵، ۱۲۶

میلان طریق الشمس کا، ۱۳۰

ناقصی حرکت، ۲۲۲

کیل کے کلئے، ۲۲۲

نیوٹن کے انجشافات، ۲۲۳

کو محسوب کرنا، ۲۳۵

ناقصیت، ۷۳

نزولی عقدہ، ۵۲

نصف النہار، ۱۱۵

نقشہ ہم شکل، ۷۷

نیوٹن کے کلئے، ۲۲۴

نیوٹن حرکت کے کلئے، ۲۲۴

نیپیر کی تمثیلات، ۱۲

وقت ظاہری، ۳۳۲

دیالنسیا پر مقناطیسی انصراف، ۱۲۱

ہندسی اصول اوسط حرکت کا، ۳۲۶

ہیلی کا مدار تارا، ۲۴۲

ہیئت انعطاف، ۱۸۱

ہیئت کھڑی، ۳۱۱

یوم کوکبی، ۱۳۰

یولر کا مسئلہ، ۲۵۳

فہرست اصطلاحات

علم ہیئت کروی

حصہ اول

Aberration	ضلالت
Abscissa	فصلہ
Altazimuth	آلدارتفاع والست
Almucantar	المقنطر
Analogies	تمیثات
Andromedae	اندرومیدا
Antarctic circle	دائرہ قطب جنوبی
Antinole	ضد شطب
Antipodal	تحت قدمی
Aphelion	اوج
Apex	راس
Apogee	بعیدارضی
Apse	اوج
Aquilæ	عقاب
Arcturus	سماک راج
Arctic circle	دائرہ قطب شمالی
Aries	حمل
Ascending node	صعودی عقدہ

Asteroids	نجیم
Astrograph	نجم نگار فلک نگار
Autumn	زریف
Autumnal equinox	استدال زریف
Capella	عمیق
Cardinal points	اساسی نقطه
Celestial	سماوی
(α) Cephei	عه قیقاؤس
Centauri	قنطورس
Circuit	دوره
Circumpolar	حائط قطبی
Civil year	کاروباری سال
Chrono-meter	وقت پیم
Clock star	گھڑی تارہ
Collimation	توازی گیری
Collimating telescope	توازی گردوربین
Comet	دند، رتارہ
Colatitude	عرض التمام
Conformal representation	هم شکل تبصیر
Conformal correspondence	هم شکل تناظر
Convolutions	نغیفه
Counter part	جواب
Corpuscular theory	جسمیه نظریه
Critical stage	فاصل منزل
Culmination	تکبید

Culminate	تکبد کرنا
Current coordinates	رواں محدود
Cusp	قرن
Cycle	دور
Cyclic	دائری
Cygn	دجاہہ
Declination axis	میلی محور
Defective limb	ناقص کنارہ
Declination	میل
Deimos	دیوس
Depression	پستی
Differential formula	تفرقی ضابطہ
Descending node	نزولی عقدہ
Dispersion	انتشار
Duplicate ratio	نسبت ثنائۃ
Diurnal	یومی
Ellipticity	ناقصیت
Elongation	ابتعاد
Epoch	قرن
Equation of time	وقت کی مساوات
Equinoctial colure	دائرہ اعتدالین
Ephemeris	الفیمیرس
Error of collimation	خطائے توازی گری
Eridani	النہر
Evening star	شام کا ستارہ

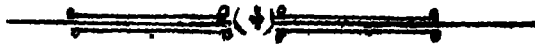
Expose	عریان کرنا
Extrapolation	ورائی ادراج
Eccentric	خارج المرکز
Eye piece	چشمہ
Exterior planet	بیرونی سیارہ
Focal circle	ماسکی دائرہ
First quarter	پہلا ربع
Field of view	میدان نظر
Gearing	گیرائی
Generalized instrument	تعمیمی آلہ
Geocentric	ارض مرکزی
Gun-metal	توب دھات
Helimeter	شمس سیم
Helio-graph	شمس نگار
Horary motions	ساعت وادی حرکتیں
Hour angle	ساعتی زاویہ
Ideal	تصویری کامل
Index error	منظاری خطا
Inferior planet	سفلی سیارہ
Intergration by parts	یکمحل بالحصص
Interpolation	بینی ادراج
Invert	مقلوب کرنا
Inversion	انقلاب
Inverses	مقلوبات
Invariant	غیر متغیر

Iris	ایریس
Jupiter	مشتری
Latitude	عرض بلد
Latus-rectum	وتر خاص
Libra	میزان
Leap year	سال کبیسه
Light equation	نوری مساوات
Limb of the sun	کناره (سورج کا)
Longitude	طول بلد
Loxodrome	مساوی المیلان
Lunation	قمریت
Luni-solar-precession	قمر شمسی استقبال
Major circle	بڑا دائرہ
Mechanism	میکانیت
Milky way	کھکشان
Minor circle	صغیر دائرہ
Nadir	قدم
Nebeula	سحاب
Nole	شطب
Nutation	کبو
Object glass	دبانہ
Obliquity	میلان
Occultation	استجاب
Opposition	تقابل
Optical	منظری

Orbit	مدار
Ordinate	معیین
Osculating curve	نشی منحنی
Pegasus	فرس
Pennumbra	ظل اشوب
Perigee	قریب ارضی
Perihelion	ضیف
Periodic time	مدت دوران
Perspective projection	منظری تطلیل
Phobos	فوبوس
Photographic plate	عکسی تختی
Photography	عکاسی
Photometric	ضیاء بیمائی
Pleiades	ثریا
Polaris	قطب تارہ
Position angle	زاویہ فعل
Progression	تقدم
Proper motion	ذاتی حرکت
Quadrantal-triangle	ربعی مثلث
Quadrature	تربیج
Range	سعت
Reading-microscope	قاری خوردبین
Reappearance	انجلاء
Regression	رجعت
Regulus	کلب اسد

Residuals	تقلیات
Retrograde	رجعی
Retrogression	رجعت
Right-ascension	معود مستقیم
Round numbers	بے سیر عدد
Satellites	تاج قمر
Sappho	سیفو
Saros	قون
Sidereal day	کوکبی روم
Sidereal year	کوکبی سال
Sirius	شعری
Slides	تسلی
Solar day	شمسی روم
Solstices	انقلاب
Solstitial colure	دائرہ انقلاب
Spider lines	نمود عنکبوت
Spring	بہار
Stand	پستادہ
Stationary	مقیم
Stereographic projection	تسطیحی قطار
Summer	گرمی
Sundial	دھوپ جھڑی
Terrestrial date line	ارضی تاریخ خط
The first point of Aries	رأس الحمل
The first point of Libra	رأس المیزان

Transcendental equation	علوی مساوات
Transit	مرور
Umbra	غسل محض
Undulatory Theory	موجی نظریه
Venus	زهره
Vernal equinox	اعتدال ربیع
Vertex	راس
Winter	سرما
Zenith distance	راسی فاصله
Zone	منطقه



STARS AND CONSTELATIONS

Achernar	آخر النہر
Acrab	عقرب
Adara	عذرا
Alcor	الخور
Aleyone	السیونی
Aldebaran	الذبران
Alderamin	الذراع الیمین
Algeiba	النجا
Algenib	الجنب الفرس
Algol	الغول
Algorab	الغراب
Alioth	ایاتہ
Alkaid	القائد
Alkalurops	الکلوروس
Alkes	الکاس
Almak	الغاق
Alnilam	النطاق
Alphard	الفرد
Alphecca	الفکہ
Alpheratz	الفرس

Alphirk	الفِرَق
Alraj	الرَّاعِي
Alruccabah	الرُّكْبَة
Alshain	الشَّائِن
Altair	اَلطَّائِر
Antares	اَنْتِيَرَس
Arcturus	اَرِكْيُورَس
Arneb	اَرْنَب
Asterope	اَسْتِيروپي
Atlas	اَتْلَس
Azimech	اَلْإِمَّاك
Baten Kaitos	بَطْن الْقَيْطُوس
Bellatrix	بِيلاطرس
Benetnasch	بَنَات النُّعْش
Betelgeuse	اَبْط الحُوزَا
Canopus	سَهِيل
Capella	عَمِيق
Caph	كَف
Castor	كَيْسْتَر
Cor Caroli	قَلْب چارلس
Cor Hydrae	قَلْب الْحَيَّة
Cor Leonis	قَلْب اَسَد
Cor Scorpinnis	قَلْب عَقْرَب
Cor Serpentis	قَلْب شِمَاع
Denebola	زَنْب الاسد

Diphada	ضفدرغ
Dubhe	دُبَّہ
Electra	الکٹرا
Enif	انف الفرس
Errai	الراعی
Etamin	النین
Fom	فم
Fomalhaut	فم الحوت
Giedi	جدی
Gomeisa	غمیصا
Hamal	حمل
Homam	ہمام
Hyades	ہیادیس
Izar	ازار
Kaitain	خیطین
Kaus Australis	قوس جنوبی
Kelb al Rai	کلب الراعی
Kocab	کوکب
Kaus Borealis	قوس شمالی
Maia	مایا، مئہ
Markab	مرکب
Mabsuta	مبسوطہ
Megrez	مغرز
Menkalinan	Menkalinan
Menkar	منکر
	♂ Ursae Majoris
	♂ Aurigae
	α Ceti

Merak	β Andromedae	مراق
Merope		میروپی
Mesarthim	γ Arietis	یشار تم (زبرانی)
Mintaka	δ Orionis	منطقه
Mira	θ Ceti	میرا
Mirac, see Merak	Andromedae	مراق
Mirfak	α Persei	مرفق
Mirzam	β Canis Majoris	مرزم
Mizar	ζ Ursae Majoris	میزر
Muphrid	η Bootis	مفرد
Nath	β Tauri	
Nekkar	α Bootis	نقار
Okda	α Piscum	عقدہ
Phakt	α Columbae	فاختہ
Phecda	γ Ursae Majoris	فخذ
Pleiades		ثریا - پرویں
Pleione	28 Tauri	پلیونی
Polaris		قطب تارا
Pollux		پالکس (موترا تواس)
Praesepe		پریسپی
Prima Giedi	α Capricorni	راس الجدی
Procyon		شعر الشامیہ
Ras Algethi	α Herculis	راس الجاثی
Ras Alhague	α Ophiuchi	راس الحاوی
Rastaba	β Draconis	راس التبان

Regulus	α Leonis	قلب الاسد
Rigel	β Orionis	رجل
Rotanev	β Delphini	روٹانیو
Sadachbia	γ Aquarii	سعد الاجبیه
Sadalmelik	β Aquarii	سعد الملک
Sadalsud	Aquarii	سعد السعود
Scheat	β Pegasi	شیتہ
Schedar	α Cassiopeiae	صدر
Sheliak	β Lyrae	شلیاق
Sheratan	β Arietes	شرطان
Sirius		شعری
Sirrah	α Andromedae	سرہ
Skat	δ Aquarii	
Spica	α Virginis	سنبلا
Sulaphat	γ Lyrae	سلفاتہ
Sualocin	α Delphini	سوالوسن
Talitha	i Ursae Majoris	
Tarazed	γ Aquilae	طائر الصيد
Taygeta	ξ Tauri	ٹیگیٹا
Thuban	α Draconis	تبان
Unukalhay	α Serpentis	عنق الحیہ
Vega	α Lyrae	نسر واقع
Vindemiatrix or Almuridin	ϵ Virginis	
Wasat	δ Geminorum	وسط
Yed	δ Ophiuchi	ید

Zaurak	γ Eridani	زورق
Zawijah	β Virginis	زاویہ
Zozca Zozmn	δ Leonis	
Zuben el Genubi	α Librae	الزبان الجنوبی
Zuben el Hakarbi		الزبان العقربی
Zuben el Chamali	β Librae	الزبان الشمالي

Andromeda	مرآۃ السلسلہ
Antlia	ہوا پمپ
Apus	طائر فردوس
Aquila	عقاب
Argo	السفینہ
Auriga	مسک الاعنہ
Camelopardus	شراف
Cassiopeia	ذات الکرسی
Cetus	قیطس
Chamaeleon	حربا
Circinus	پیکار
Columba	حمامہ
Coma Berenices	شعر برہنسی
Corona Australis	اکلیل جنوبی
Corona Borealis	اکلیل شمالی
Corvus	غراب
Crater	فم البرکان
Cruz	صلیب
Delphinus	دلفین
Dorado	تیغ ماہی
Draco	تنین
Equuleus	فرس اصغر
Grus	حمالہ
Indus	اندس
Mensa	مینہ

Microscopium	خور دبینہ
Oetans	مٹمنہ
Puppis	سکان، دبو سہ
Pypxsi	کپاس
Sextans	سد سہ
Telescopium	دور بینہ
Toucanus	ٹوکا نہ
Triangulum	مثلثہ
Triangulum Australe	مثلثہ جنوبی
Vela	شرع، یاد بان
Eros	ایروس
a centauri	عقنطورس
Lalande	لالاند
Cygni	دجا جہ
Cordoba	قرطبہ
Enceladus	انقلادوس
Equinus (the little horse)	قرص اصغر
Eridanus (the peacer)	النہر
Errai	الراعی
V cephii	جہ قیفاوس
Etanin of draconis	اتنین
Flora	فلورا
Foranx (the furnace)	فرنیس
Gemini (the twins)	تو امین
Giedi	جدی

Hebe	ہیب
Hercules	ہرقلس
Homan	ہمام
Horlogium (the clock)	ہاردلوگیم
Hyads	حیاریس
Hydra (the sea serpent)	
Hydrus	
Iklil	اکلیل
Scorpii	العقرب
Iapetus	آپیتس
Juno	جونو
Kaffaljidhma	کف الجذما
Ceti	قیطوس
Urse mindres	دب اصغر
Lacerta (the lizard)	لالرٹا
Leo (the lion)	اسد
Leo minor	اسد اصغر
Leonids	اسدی
Lepus (the hare)	ارنب
Lupus (the wolf)	سعی (بہیریا)
Lynse	فہد (سیاہ گوش)
Lyra (the lyre)	لیلیاق
Maia	میا
Malus	مالوس
Mirfuk	مرفق

Pegasi	
Herculis	ہرقلس
Geminorum	جوزا
Ceti	قیطس
Merope (28 Tauri)	میروپ
Mimas	میماس
Orionis	جبا
Persei, perseus	پرساوش
Canis magoria	کلب اکبر
Monoceros	گینڈا
Musca (the fly)	مکھی
Bull's Horn	قرن الثور
Leporis	الخل
Norma	نارمہ
Oberon	اوبی ران
Bootis	عوا
Pullas	پالس
Pavo	طاؤس
Pegasus	پردار گھوڑا
Phobos	فوبوس
Phoenix	فینیکس
Phurud	الفرد
Pictor	مصور
Pisces	حوت
Pisces Anstralis	حوت جنوبی

Pleiades	شریا
Pollux	راس التوام
Virgins	العذرا
Praesepe	خان النور
Procyon (canis minoris)	(کلب اصغر)
Rasalasad	راس الاسد
Ras Algethi	راس الجاشی
Ras Alhague	راس الحادی
Regulas	قلب اسد
Reticulum	شبکہ
Regel	رجل النوما
Quarii	دلو
Sadal suud	سعد السعود
Sagitta	سهم
Sagittarius	قوس تیر انداز
Sculptor	بت گر
Serpens	اعیہ
Spica	العذرا
Titan	طیطان
Vasta	وسطار
Volans	سمکہ طیارہ
Vulpecula	نعلب